UNIDAD 5. FRACCIONES Y OPERACIONES

1. FRACCIONES.
2. LA FRACCIÓN COMO OPERADOR Y COMO NÚMERO.
3. FRACCIONES EQUIVALENTES.
4. REDUCCIÓN DE FRACCIONES A COMÚN DENOMINADOR.
5. OPERACIONES CON FRACCIONES.

1. FRACCIONES

Una fracción es una expresión de la forma $\frac{a}{b}$, siendo *a* y *b* números naturales.

a → numerador
b → denominador

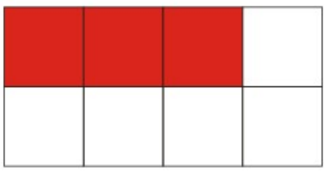
Las fracciones se utilizan para representar una parte respecto a un todo, que llamamos la unidad.

- *Denominador*: indica el número de partes iguales en que está dividida la unidad.
- *Numerador*: indica el número de partes que tomamos de la unidad.

Las fracciones pueden ser:

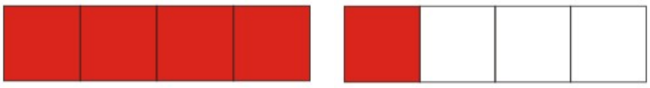
- *Menores que la unidad*: son aquellas en las que el numerador es menor que el denominador. También se llaman fracciones propias.
- *Mayores que la unidad*: son aquellas en las que el numerador es mayor que el denominador. También se llaman fracciones impropias.
- *Iguales que la unidad*: son aquellas en las que el numerador es igual que el denominador.

Ejemplo. Representaremos una fracción propia, una impropia y una igual que la unidad.



$\frac{3}{8}$ (propia)

$\frac{5}{5}$ (igual que la unidad)



$\frac{5}{4}$ (impropia)

¿Cómo se lee una fracción? El numerador se lee tal cual sea el número. En cambio, el denominador se lee según el número que haya: 2 → medios, 3 → tercios, 4 → cuartos, 5 → quintos, 6 → sextos, 7 → séptimos, 8 → octavos, 9 → novenos, 10 → décimos. Y del 11 en adelante se lee el número añadiendo *–avos*.

Ejemplo. Veamos cómo se leen las siguientes fracciones:

$\frac{3}{12}$ → Tres doceavos $\quad$ $\frac{7}{5}$ → Siete quintos $\quad$ $\frac{3}{20}$ → Tres veinteavos

$\frac{18}{4}$ → Dieciocho cuartos $\quad$ $\frac{1}{9}$ → Un noveno $\quad$ $\frac{6}{2}$ → Seis medios

2. LA FRACCIÓN COMO OPERADOR Y COMO NÚMERO

Una fracción se puede aplicar a un número; esto es lo que se llama actuar como operador. Se hace multiplicando el número por el numerador y, después, el resultado se divide entre el denominador.

Ejemplo.

$$\frac{2}{3} \text{ de } 45 = \frac{2 \cdot 45}{3} = \frac{90}{3} = 30$$

$$\frac{5}{7} \text{ de } 14 = \frac{5 \cdot 14}{7} = \frac{70}{7} = 10$$

Ejemplo. En la clase de mi hermana hay 18 chicos y $\frac{1}{3}$ de ellos son rubios. ¿Cuántos chicos rubios son?

$\frac{1}{3}$ de $18 = \frac{1 \cdot 18}{3} = \frac{18}{3} = 6$ → Hay 6 chicos rubios en la clase.

Las fracciones también se pueden entender como números. Para ello no hay más que realizar la división que expresa la fracción: el numerador entre el denominador. El resultado puede ser un número natural o un número decimal.

Ejemplo.

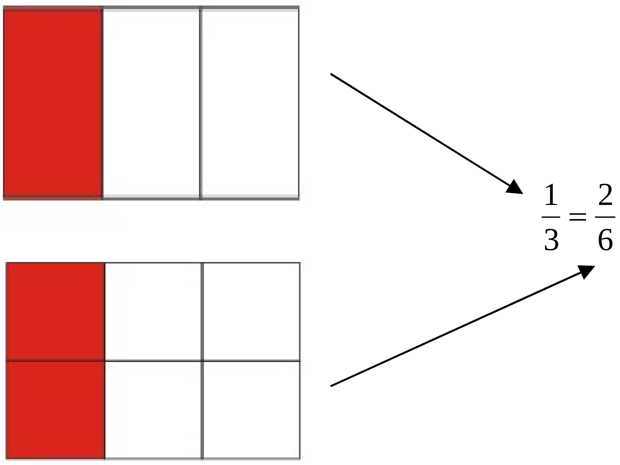
$$\frac{3}{4} = 0{,}75 \qquad \frac{7}{5} = 1{,}4 \qquad \frac{9}{3} = 3$$

3 0	4	7	5	9	3
2 0	0,75	2 0	1,4	0	3
0		0			

3. FRACCIONES EQUIVALENTES

Dos fracciones son equivalentes si representan la misma parte de la unidad.

Ejemplo. Las fracciones $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{6}$ son equivalentes, pues como vemos en los dibujos representan la misma parte de la unidad.



Otra forma de saber si dos fracciones son equivalentes es si al multiplicar "en cruz" los numeradores y denominadores de ambas fracciones se obtiene el mismo resultado.

Ejemplo.

$\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{6}$ → $\begin{cases} 3 \times 2 = 6 \\ 1 \times 6 = 6 \end{cases}$ Estas dos fracciones son equivalentes.

$\frac{3}{4}$ y $\frac{9}{12}$ → $\begin{cases} 4 \times 9 = 36 \\ 3 \times 12 = 36 \end{cases}$ Estas dos fracciones son equivalentes.

$\frac{3}{7}$ y $\frac{4}{10}$ → $\begin{cases} 7\times 4 = 28 \\ 3\times 10 = 30 \end{cases}$ Estas dos fracciones <u>no</u> son equivalentes.

Hay dos formas de obtener fracciones equivalentes a una fracción: por amplificación y por simplificación.

- *<u>Amplificación</u>*: si multiplicamos el numerador y el denominador de una fracción por un mismo número, obtenemos una fracción equivalente.
- *<u>Simplificación</u>*: si dividimos el numerador y el denominador de una fracción por un mismo número, obtenemos una fracción equivalente.

Una fracción se llama <u>irreducible</u> cuando no se puede simplificar.

<u>Ejemplo</u>. Vamos a obtener dos fracciones equivalentes a $\frac{12}{18}$ por amplificación y otras dos por simplificación.

Por amplificación: $\frac{12}{18} = \frac{12\times 2}{18\times 2} = \frac{24}{36}$ $\qquad$ $\frac{12}{18} = \frac{12\times 3}{18\times 3} = \frac{36}{54}$

Por simplificación: $\frac{12}{18} = \frac{12:3}{18:3} = \frac{4}{6}$ $\qquad$ $\frac{12}{18} = \frac{12:6}{18:6} = \frac{2}{3}$

Las 4 fracciones obtenidas son todas equivalentes a $\frac{12}{18}$.

<u>Ejemplo</u>. Vamos a simplificar la fracción $\frac{36}{48}$ hasta llegar a la fracción irreducible.

$$\frac{36}{48} = \frac{36:2}{48:2} = \frac{18}{24} = \frac{18:2}{24:2} = \frac{9}{12} = \frac{9:3}{12:3} = \frac{3}{4}$$

4. REDUCCIÓN DE FRACCIONES A COMÚN DENOMINADOR

Reducir fracciones a común denominador es encontrar fracciones equivalentes a ellas con un mismo denominador. Se hace de la siguiente forma:

1º) Calculamos el mínimo común múltiplo de los denominadores y éste será el nuevo denominador de las fracciones.

2º) Después se calculan los numeradores dividiendo el nuevo denominador entre el anterior y multiplicando por el numerador.

<u>Ejemplo</u>. Vamos a reducir las fracciones $\frac{2}{5}$ y $\frac{3}{4}$ a común denominador.

Primero calculamos el *mcm(5,4)* :

$$\begin{array}{r|l} 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \qquad mcm(5{,}4) = 2^2 \cdot 5 = 20$$

Así pues, el común denominador va a ser 20 y las fracciones serán:

$$\frac{2}{5} = \frac{\quad}{20} \qquad\qquad \frac{3}{4} = \frac{\quad}{20}$$

Ahora sólo nos falta calcular el numerador de cada fracción:

$$20 : 5 = 4 \qquad\qquad 20 : 4 = 5$$
$$4 \times 2 = 8 \qquad\qquad 5 \times 3 = 15$$

Por lo tanto, las fracciones reducidas a común denominador son:

$$\frac{2}{5} = \frac{8}{20} \qquad\qquad \frac{3}{4} = \frac{15}{20}$$

Como vemos, hemos encontrado dos fracciones equivalentes a $\frac{2}{5}$ y $\frac{3}{4}$ con un mismo denominador.

La reducción de fracciones a común denominador se aplica para sumar y restar fracciones, como veremos en el apartado siguiente. También se utiliza para comparar (ordenar) fracciones.

Para comparar u ordenar fracciones tenemos que reducirlas a común denominador y, una vez hecho esto, se comparan los numeradores. Será mayor la que tenga mayor numerador y, de igual forma, será menor la que tenga menor denominador.

<u>Ejemplo</u>. Ordena de mayor a menor las siguientes fracciones $\frac{5}{8}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$.

En primer lugar las reducimos a común denominador:

$$\frac{5}{8}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4} \quad \rightarrow \quad \frac{5}{8}, \frac{4}{8}, \frac{6}{8}$$

$$mcm(8,2,4) = 8$$

Ahora que ya están reducidas al mismo denominador, se comparan los numeradores. La ordenación de mayor a menor será:

$$\frac{6}{8} > \frac{5}{8} > \frac{4}{8}$$

O lo que es lo mismo, ordenando las fracciones originales:

$$\frac{3}{4} > \frac{5}{8} > \frac{1}{2}$$

5. OPERACIONES CON FRACCIONES

SUMA Y RESTA DE FRACCIONES

Se distinguen dos casos:

1º) Si las fracciones tienen el mismo denominador.
2º) Si las fracciones tienen distinto denominador.

1º) Para sumar o restar fracciones con el mismo denominador se suman o restan los numeradores y el denominador se deja igual.

Ejemplo. Sumas y restas con el mismo denominador.

$$\frac{4}{3}+\frac{7}{3}=\frac{4+7}{3}=\frac{11}{3} \qquad \frac{7}{9}-\frac{5}{9}=\frac{7-5}{9}=\frac{2}{9}$$

$$\frac{5}{4}+\frac{7}{4}-\frac{2}{4}=\frac{5+7-2}{4}=\frac{10}{4}$$

2º) Para sumar o restar fracciones con distinto denominador hay que reducirlas primero a común denominador, y después se suman o restan como fracciones que tienen el mismo denominador.

Ejemplo. Sumas y restas de fracciones con distinto denominador.

$$\frac{5}{3}+\frac{1}{2}=\frac{10}{6}+\frac{3}{6}=\frac{10+3}{6}=\frac{13}{6}$$

$$mcm(3,2)=6$$

$$\frac{8}{5}-\frac{2}{3}=\frac{24}{15}-\frac{10}{15}=\frac{24-10}{15}=\frac{14}{15}$$

$$mcm(5,3)=15$$

$$\frac{3}{6}+\frac{7}{4}-\frac{3}{2}=\frac{6}{12}+\frac{21}{12}-\frac{18}{12}=\frac{6+21-18}{12}=\frac{9}{12}$$

$$mcm(6,4,2)=12$$

MULTIPLICACIÓN DE FRACCIONES

El resultado de multiplicar dos o más fracciones es otra fracción cuyo numerador el producto de los numeradores y el denominador es el producto de los denominadores.

Ejemplo.

$$\frac{7}{3}\times\frac{4}{6}=\frac{7\times 4}{3\times 6}=\frac{28}{18}$$

$$\frac{5}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}=\frac{5\times 1\times 2}{2\times 3\times 5}=\frac{10}{30}$$

DIVISIÓN DE FRACCIONES

El resultado de dividir dos fracciones es otra fracción cuyo numerador es el producto del numerador de la primera por el denominador de la segunda, y el denominador es el producto del denominador de la primera por el numerador de la segunda. Esto es lo que se llama multiplicar "en cruz" las fracciones.

Ejemplo.

$$\frac{5}{8}:\frac{7}{2}=\frac{5\times 2}{8\times 7}=\frac{10}{56}$$

$$\frac{9}{7}:\frac{5}{3}=\frac{9\times 3}{7\times 5}=\frac{27}{35}$$

Nota: recuerda, para terminar, que cualquier número se puede poner como una fracción con denominador 1.

Ejemplo.

$$\frac{2}{7}\times 3=\frac{2}{7}\times\frac{3}{1}=\frac{2\times 3}{7\times 1}=\frac{6}{7}$$

$$4:\frac{5}{6}=\frac{4}{1}:\frac{5}{6}=\frac{4\times 6}{1\times 5}=\frac{24}{5}$$