UNIDAD 2. MÚLTIPLOS Y DIVISORES

1. MÚLTIPLOS DE UN NÚMERO.
2. DIVISORES DE UN NÚMERO.
3. NÚMEROS PRIMOS Y NÚMEROS COMPUESTOS.
4. CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD.
5. MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO.
6. MÁXIMO COMÚN DIVISOR.

1. MÚLTIPLOS DE UN NÚMERO

Un número *a* es <u>múltiplo</u> de un número *b* si la división de *a* entre *b* es exacta.

<u>Ejemplos</u>: 24 es múltiplo de 8 porque la división 24:8 es exacta.

35 no es múltiplo de 6 porque la división 35:6 no es exacta.

Los múltiplos de un número se calculan multiplicando dicho número por los números naturales, es decir, por 1, 2, 3, 4, ...
El conjunto de los múltiplos de un número *a* se escribe así:

$$\dot{a} = \{ a\cdot 1 \,,\, a\cdot 2 \,,\, a\cdot 3 \,,\, a\cdot 4 \,,\, a\cdot 5 \,,\, ...\}$$

<u>Ejemplo</u>: Los múltiplos de 8 los calculamos multiplicando 8 por 1, por 2, por 3, ...

$$\dot{8} = \{ 8 \,,\, 16 \,,\, 24 \,,\, 32 \,,\, 40 \,,\, 48 \,,\, ...\}$$

Podemos calcular tantos múltiplos como queramos, pues el conjunto de los múltiplos de un número es un conjunto infinito.

Con lo visto anteriormente, observamos que cualquier número es múltiplo de sí mismo y de la unidad.

<u>Ejemplo</u>: Comprobamos que 5 es múltiplo de 5 y de 1.

La división 5:5 es exacta, por lo tanto 5 es múltiplo de 5.
La división 5:1 es exacta, por lo tanto 5 es múltiplo de 1.

2. DIVISORES DE UN NÚMERO

Un número *a* es divisor de un número *b* si la división de *b* entre *a* es exacta.

Ejemplos: 5 es divisor de 30 porque la división 30:5 es exacta.

9 no es divisor de 21 porque la división 21:9 no es exacta.

Para calcular todos los divisores de un número, dividimos dicho número entre los números naturales, es decir, entre 1, 2, 3, ... hasta llegar a la división en la que el cociente sea menor que el divisor. De cada división exacta obtenemos dos divisores: el divisor y el cociente.

El conjunto de los divisores de un número *a* se escribe Div(*a*).

Ejemplo: Vamos a calcular todos los divisores de 28.

Dividimos 28 entre 1, entre 2, entre 3, ... hasta llegar a una división en la que el cociente sea menor que el divisor:

28	1	28	2	28	3	28	4	28	5	28	6
08	28	08	14	1	9	0	7	3	5	4	4
0		0									

No seguimos dividiendo ya que en la última división el cociente es menor que el divisor. Veamos que divisores hemos obtenido:

28 : 1 = 28 división exacta, entonces 1 y 28 son divisores
28 : 2 = 14 división exacta, entonces 2 y 14 son divisores
28 : 4 = 7 división exacta, entonces 4 y 7 son divisores

Por lo tanto, Div(28) = {1, 2, 4, 7, 14, 28}.

Es fácil observar que el 1 es divisor de cualquier número y que cualquier número es divisor de sí mismo.

3. NÚMEROS PRIMOS Y NÚMEROS COMPUESTOS

Un número *a* es primo si sólo tiene como divisores el 1 y él mismo.

Para saber si un número es primo hallamos sus divisores y si únicamente tiene dos divisores, el 1 y él mismo, entonces dicho número es primo.

Los primeros números primos son: 2, 3, 5, 7, 11, 13, ...

Un número es compuesto cuando no es primo, es decir, cuando tiene más de dos divisores.

El número 1 no se considera ni primo ni compuesto. Cualquier otro número natural o bien es primo o bien es compuesto.

<u>Ejemplo</u>: Los números 19 y 33, ¿son primos o compuestos?

Si calculamos los divisores de 19 y los de 33 obtenemos que:

Div(19) = { 1 , 19 } → 19 sólo tiene dos divisores, así pues es un número primo.

Div(33) = { 1 , 3 , 11 , 33 } → 33 tiene más de dos divisores, por lo tanto es un número compuesto.

4. CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD

Los criterios de divisibilidad son unas reglas que nos permiten saber si un número se puede dividir por otro (división exacta) sin realizar la división.

Entre los criterios existentes, los más importantes son los siguientes:

- <u>Criterio del 2</u>: un número es divisible por 2 si el número termina en 0 o en cifra par.
- <u>Criterio del 3</u>: un número es divisible por 3 si al sumar las cifras del número el resultado es múltiplo de 3.
- <u>Criterio del 5</u>: un número es divisible por 5 si el número termina en 0 o en 5.
- <u>Criterio del 10</u>: un número es divisible por 10 si el número termina en 0.

<u>Ejemplo</u>: Utiliza los criterios de divisibilidad para saber si el número 465 es divisible por 2, por 3, por 5 y por 10.

- **No** es divisible por 2 porque el número termina en 5 (cifra impar).
- **Sí** es divisible por 3 porque la suma de sus cifras da como resultado un múltiplo de 3.
  4 + 6 + 5 = 15 → 15 es múltiplo de 3
- **Sí** es divisible por 5 porque el número termina en 5.
- **No** es divisible por 10 porque el número no termina en 0.

5. MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO

El <u>mínimo común múltiplo</u> (mcm) de dos o más números es el menor de todos los múltiplos que tienen en común dichos números.

El proceso que seguiremos para calcular el mcm de dos o más números será el siguiente:

1. Factorizamos los números, es decir, los descomponemos como producto de factores primos.
2. De las descomposiciones hechas, tomamos los factores primos comunes y no comunes elevados al mayor exponente.
3. El mcm será el producto de los factores tomados en el paso anterior.

Ejemplo: Hallar el mcm de 6 y 20.

Primero factorizamos ambos números:

$$\begin{array}{r|l} 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$6 = 2 \cdot 3$ $\qquad$ $20 = 2^2 \cdot 5$

Una vez hechas las factorizaciones, observamos que nos aparecen los factores primos 2, 3 y 5, por lo tanto estos son los factores que tenemos que coger pero teniendo en cuenta que hay tomarlos elevados al mayor exponente, así que el 2 lo cogemos elevado al cuadrado.

Por lo tanto: $mcm(6,20) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$

6. MÁXIMO COMÚN DIVISOR

El máximo común divisor (mcd) de dos o más números es el mayor de todos los divisores que tienen en común dichos números.

El proceso a seguir para calcular el mcd de dos o más números será el siguiente:

1. Factorizamos los números, es decir, los descomponemos como producto de factores primos.
2. De las descomposiciones hechas, tomamos sólo los factores primos comunes elevados al menor exponente.
3. El mcd será el producto de los factores tomados en el paso anterior.

Ejemplo: Hallar el mcd de 72 y 60.

Factorizamos los números:

$$\begin{array}{r|l} 72 & 2 \\ 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$72 = 2^3 \cdot 3^2$ $\qquad$ $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$

Observamos que sólo hay dos factores comunes a ambas factorizaciones, que son el 2 y el 3, así pues éstos son los que tomaremos pero teniendo en cuenta que hay que cogerlos elevados al menor exponente.

Por lo tanto, $mcd(72,60) = 2^2 \cdot 3 = 12$

Si al calcular el mcd de varios números, éstos no tienen ningún factor primo en común, entonces el mcd es 1.

Ejemplo: Hallar el mcd de 14 y 45.

Factorizamos los números:

$$\begin{array}{r|l} 14 & 2 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$14 = 2 \cdot 7$ $\qquad$ $45 = 3^2 \cdot 5$

Observamos que no hay ningún factor en común a ambas factorizaciones, con lo cual el máximo común divisor de 14 y 45 es 1.

mcd(14,45) = 1