

UNIDAD 1. NÚMEROS NATURALES Y OPERACIONES

1. SISTEMA DE NUMERACIÓN DECIMAL.
2. LECTURA, ESCRITURA, DESCOMPOSICIÓN Y ORDENACIÓN DE NÚMEROS NATURALES.
3. SUMA DE NÚMEROS NATURALES. PROPIEDADES.
4. RESTA DE NÚMEROS NATURALES. PRUEBA.
5. MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS NATURALES.- PROPIEDADES.
6. FACTOR COMÚN.
7. DIVISIÓN DE NÚMEROS NATURALES: PRUEBA Y PROPIEDADES.
8. JERARQUÍA DE CÁLCULO EN OPERACIONES COMBINADAS.



1. SISTEMA DE NUMERACIÓN DECIMAL

Nuestro sistema de numeración decimal se llama así porque las unidades **aumentan y disminuyen de diez en diez**. Cada unidad de un orden superior equivale a 10 unidades del orden inmediato inferior.

1 decena = 10 unidades
 1 centena = 10 decenas
 1 unidad de millar = 10 centenas
 1 decena de millar = 10 unidades de millar
 (y así sucesivamente)

1 D = 10 U
 1 C = 10 D
 1 UM = 10 C
 1 DM = 10 UM

2. NOMENCLATURA A SEGUIR

U = unidades, D = decenas, C = centenas,
 UM = unidades de millar, DM = decenas de millar, CM = centenas de millar, uM = unidades de millón, dM = decenas de millón y cM = centenas de millón.



3. VALOR RELATIVO DE LAS CIFRAS

El valor de una cifra **depende del lugar** donde vaya colocada en el número.

Ejemplo.

Una misma cifra 3 en el número 535 vale 30 porque Representa 3 decenas. En el número 30.268 vale 30.000 ya que representa 3 decenas de millar.

4. LECTURA Y ESCRITURA DE NÚMEROS NATURALES

Para leer un número **se separan las cifras en grupos de tres y se coloca un punto**. Luego se lee cada grupo por separado y en los puntos se dice millones y mil.

Ejemplo. El número 35.792.074 se lee “treinta y cinco millones setecientos noventa y dos mil setenta y cuatro”.

5. DESCOMPOSICIÓN DE NÚMEROS NATURALES.

Puede servir de ayuda la construcción de tabla donde figuren los distintos órdenes de unidades.

| MILLONES | | | MILLARES | | | UNIDADES | | |
|----------|----|----|----------|----|----|----------|---|---|
| cM | cD | uM | CM | DM | UM | C | D | U |
| | 3 | 5 | 7 | 9 | 2 | 0 | 7 | 4 |



Ejemplo.

$$35.792.074 = 3 \text{ dM} + 5 \text{ uM} + 7 \text{ CM} + 9 \text{ DM} + 2 \text{ UM} + 0 \text{ C} + 7 \text{ D} + 4 \text{ U}$$

$$35.792.074 = 30.000.000 + 5.000.000 + 700.000 + 90.000 + 2.000 + 0 + 70 + 4$$

La cifra 7, que aparece dos veces, según sea decenas de millar CM o decenas D, tiene diferente valor (700.000 ó 70).

6. ORDENACIÓN DE NÚMEROS NATURALES.

Para ordenar los números naturales.

1º) Vemos si tienen distinta cantidad de cifras. En tal caso será más pequeño el que menos cifras tenga.

2º) Si tienen la misma cantidad de cifras, comparamos las primeras cifras (cifras de la izquierda) y es *mayor el que tenga la primera cifra mayor*.

3º) Si tienen la primera cifra igual, se compara la segunda y así sucesivamente.

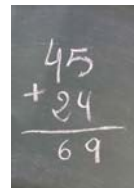
Ejemplo.

$12.424 > 9.525$ porque el primero tiene 5 cifras.

$25.678 > 25.600$ porque ambos comienzan por 256 y en cuarto lugar (lugar de las decenas) el primero lleva un 7 y el segundo un 0, que es menor.

7. TÉRMINOS DE LA SUMA

Los términos de la suma se llaman **sumandos** y el resultado **suma** o **total**.


$$\begin{array}{r} 45 \\ + 24 \\ \hline 69 \end{array}$$

8. SUMA DE NÚMEROS NATURALES

Para sumar números naturales **se colocan en columna unidades con unidades, decenas con decenas, centenas con centenas y así sucesivamente**. Tendremos en cuenta si en cada columna sale diez y nos llevamos una, o veinte y nos llevamos dos, o treinta y nos llevamos tres...

Se comienza a sumar por las unidades (parte derecha).

| | | | | | |
|--|----------|----------|----------|----------|----------|
| | | | | | |
| | 5 | 6 | 8 | 9 | 1 |
| | | | 2 | 5 | 2 |
| | + | 4 | 3 | 7 | 0 |
| | | | | 1 | 5 |
| | 6 | 1 | 5 | 2 | 8 |
| | | | | | |

Ejemplo.

$$56.891 + 252 + 4.370 + 15 = \mathbf{61.528}$$

56.891, 252, 4.370 y 15 son los sumandos.

61.528 es la suma o total.

9. PROPIEDADES DE LA SUMA DE NÚMEROS NATURALES

Propiedad conmutativa: El orden de los sumandos no altera el resultado. Al sumar dos números da igual sumar el primero con el segundo que el segundo con el primero.

| | | | |
|-----------------|-----------------|-------------|-------------|
| <u>Ejemplo.</u> | $4 + 5 = 5 + 4$ | $4 + 5 = 9$ | $5 + 4 = 9$ |
|-----------------|-----------------|-------------|-------------|

Propiedad asociativa: Al sumar tres números da igual sumar los dos primeros y lo que salga sumarlo con el tercero que sumar los dos últimos y lo que salga sumarlo con el primero.

Ejemplo.

$$(4 + 5) + 6 = 4 + (5 + 6)$$

$$(4 + 5) + 6 = 9 + 6 = 15$$

$$4 + (5 + 6) = 4 + 11 = 15$$

10. TÉRMINOS DE LA RESTA

Los términos de la resta se denominan **minuendo** al de arriba, **sustraendo** al de abajo y **resta o diferencia** al resultado que se obtiene.

11. RESTA DE NÚMEROS NATURALES

Para sumar números naturales **se colocan en columna unidades con unidades, decenas con decenas, centenas con centenas y así sucesivamente**. Se comienza a restar por las unidades (parte izquierda).

| |
|--|
| <u>Ejemplo.</u> |
| <p>Operación: $90.164 - 5.348 = 84.816$ Minuendo = 90.164 Sustraendo = 5.348 Resta o diferencia = 84.816</p> |

OJO: Si el número de arriba o del minuendo es menor que el del sustraendo, se le suman 10 y *nos llevamos una* para la siguiente columna.

| Resta | | | | | Prueba | | | | |
|-------|---|---|---|---|--------|---|---|---|---|
| 9 | 0 | 1 | 6 | 4 | 8 | 4 | 8 | 1 | 6 |
| - | 5 | 3 | 4 | 8 | + | 5 | 3 | 4 | 8 |
| 8 | 4 | 8 | 1 | 6 | 9 | 0 | 1 | 6 | 4 |
| | | | | | | | | | |

12. PRUEBA DE LA RESTA

Una resta está bien hecha cuando sumamos el sustraendo con la diferencia y nos sale el minuendo.

$$\text{Minuendo} = \text{sustraendo} + \text{diferencia}$$

Ejemplo.

$$5.349 + 84.816 = 90.164$$

Como al sumar el sustraendo con la diferencia sale el minuendo, podemos afirmar que la resta está bien hecha.

13. TÉRMINOS DE LA MULTIPLICACIÓN

Una multiplicación es una suma de sumandos iguales.

$$5 + 5 + 5 + 5 = 5 \times 4 = 20$$

Los números que se multiplican se llaman **factores** y el resultado **producto**. Generalmente al número de arriba o número primero se denomina multiplicando y al segundo número o número de abajo multiplicador.

4 y 5 son los factores, 4 es el multiplicando, 5 el multiplicador y 20 el producto.



14. MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS NATURALES

Para multiplicar un número por otro de varias cifras:

1º Se multiplica el primer factor por la cifra de las unidades del segundo.

2º Se multiplica el primer factor por la cifra de las decenas del segundo y se anota debajo, pero empezando a colocar las cifras debajo de la columna de las decenas (porque multiplicamos decenas).

3º Se multiplica el primer factor por la cifra de las centenas del segundo y se anota debajo, pero empezando a colocar cifras debajo de las cifras de las centenas (porque multiplicamos centenas).

4º Y así sucesivamente.

5º Finalmente sumamos los resultados anteriores y obtenemos el producto.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | |
| | | | 9 | 4 | 7 | 5 | |
| | | | x | 3 | 5 | 2 | |
| | | | 1 | 8 | 9 | 5 | 0 |
| | 4 | 7 | 3 | 7 | 5 | | |
| 2 | 8 | 4 | 2 | 5 | | | |
| 3 | 3 | 3 | 5 | 2 | 0 | 0 | |
| | | | | | | | |

15. PROPIEDADES DE LA MULTIPLICACIÓN

Propiedad conmutativa: El orden de los factores no altera el producto. Al multiplicar dos números da igual multiplicar el primero por el segundo que multiplicar el segundo por el primero, el resultado no varía.

Ejemplo:

$$4 \times 5 = 5 \times 4$$

$$4 \times 5 = 20$$

$$5 \times 4 = 20$$

Propiedad asociativa: Al multiplicar tres números da igual multiplicar los dos primeros y lo que salga por el tercero que multiplicar los dos últimos y lo que salga por el primero.

Ejemplo: $(4 \times 5) \times 6 = 4 \times (5 \times 6)$
 $(4 \times 5) \times 6 = 20 \times 6 = 120$ $4 \times (5 \times 6) = 4 \times 30 = 120$

Propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la suma: El producto de un número por una suma es igual a la suma de los productos de ese número por cada uno de los sumandos.

Ejemplo: $4 \times (5 + 3) = (4 \times 5) + (4 \times 3)$
 $4 \times (5 + 3) = 4 \times 8 = 32$ $(4 \times 5) + (4 \times 3) = 20 + 12 = 32$

Propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la diferencia: El producto de un número por una diferencia es igual a la diferencia de los productos de ese número por cada uno de los números restados.

Ejemplo: $4 \times (5 - 3) = (4 \times 5) - (4 \times 3)$
 $4 \times (5 - 3) = 4 \times 2 = 8$ $(4 \times 5) - (4 \times 3) = 20 - 12 = 8$

16. SACAR FACTOR COMÚN

Si queremos sacar factor común en una suma o en una diferencia, es como aplicar la propiedad distributiva pero al revés, es decir: **el número que se repite o factor común se saca fuera y el resto se deja dentro del paréntesis, en forma de resta o suma**, según se trate.

Ejemplo:
 $(4 \times 5) + (4 \times 3) + (4 \times 6) = 4 \times (5 + 3 + 6)$ el factor común es el 4
 $(4 \times 5) - (4 \times 3) = 4 \times (5 - 3)$ el factor común es el 4

17. MULTIPLICACIÓN POR LA UNIDAD SEGUIDA DE CEROS

Para multiplicar un número por 10, por 100, por 1.000..., basta **añadir al número tantos ceros como acompañan a la unidad**.

Ejemplo: $35 \times 100 = 3.500$ $624 \times 1000 = 624.000$

18. MULTIPLICACIÓN POR NÚMEROS TERMINADOS EN CEROS

Para multiplicar números que acaban en cero primero ***multiplicamos los números sin ceros y después añadimos tantos ceros como tengan entre los dos*** números multiplicados.

| |
|------------------------------------|
| Ejemplo: $150 \times 300 = 45.000$ |
|------------------------------------|

19. TÉRMINOS DE LA DIVISIÓN

Los términos de la división son ***dividendo, divisor, cociente y resto***.

$$12.694.502 : 326 = 38.940 \text{ y sobran } 62$$

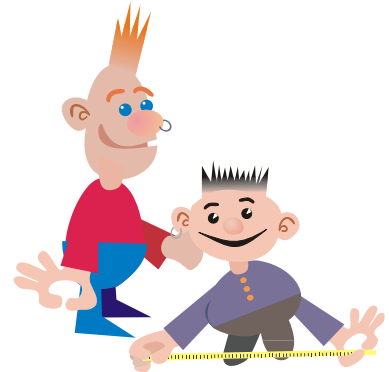
Dividendo: número que se reparte o divide (12.694.502).

Divisor: número de partes que se hacen o número por el que se divide (326).

Cociente: Resultado de la división (38.940).

Resto: lo que sobra del reparto o división (62).

$$D = 12.694.502 \quad d = 326 \quad c = 38.940 \quad r = 62$$



20. DIVISIÓN DE NÚMEROS NATURALES

Dividir es repartir en partes iguales. Para realizar una división de números naturales:

1º Comprobamos cuantas cifras tiene el divisor y separamos en el dividendo el mismo número de cifras que tiene el divisor (comenzando por la izquierda).

2º Si el número formado es menor que el divisor, se coge una cifra más.

3º Buscamos la cifra que multiplicada por el divisor se aproxime más a las cifras separadas en el dividendo y la escribimos en el cociente.

4º Si nos pasamos, cogemos la cifra anterior en el cociente.

5º Multiplicamos la cifra escrita en el cociente por el divisor y el resultado se lo vamos restando a las cifras separadas en el dividendo.

6º Comprobamos que la cifra que nos queda en el resto es menor que el divisor.

7º Bajamos la siguiente cifra del dividendo y volvemos a repetir los pasos anteriores hasta que se terminen las cifras del dividendo.

$$\begin{array}{r}
 12694502 \quad | \quad 326 \\
 2914 \\
 3065 \\
 1310 \\
 0062 \\
 062
 \end{array}$$

P R U E B A :

$$\begin{array}{r}
 38940 \\
 \times 326 \\
 \hline
 233640 \\
 77880 \\
 116820 \\
 \hline
 12694440 \\
 + \quad \quad \quad 62 \\
 \hline
 12694502
 \end{array}$$

21. PROPIEDAD DEL RESTO

En una división bien realizada **el resto debe ser siempre menor que el divisor**. En la división anterior: $r = 62 < d = 326$.

$$r < d$$

22. DIVISIÓN EXACTA Y DIVISIÓN ENTERA

Una división es exacta cuando el resto es cero.

A photograph of a whiteboard showing the handwritten division $24 \div 6 = 4$ with a remainder of 0. The numbers are written in blue marker.

Ejemplo. $24 : 6 = 4$ es una división exacta porque si repartimos 24 caramelos entre 6 niños, a cada uno le tocan 4 caramelos y no sobra ninguno. El resto es 0.

Una división es **entera cuando el resto es distinto de cero**.

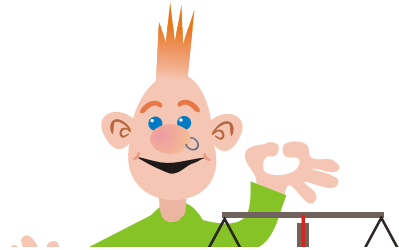
Ejemplo: $8 : 3 = 2$ es una división entera porque si repartimos 8 caramelos entre 3 niños a cada uno le tocan 2 caramelos y sobran 2. El resto es 2.

23. PRUEBA DE LA DIVISIÓN

Una división está bien realizada si al multiplicar el divisor por el cociente y sumarle el resto obtenemos el dividendo.

$$\text{DIVIDENDO} = (\text{divisor} \times \text{cociente}) + \text{resto}$$

$$D = (d \times c) + r$$



24. DIVISIÓN DE NÚMEROS ACABADOS EN CERO POR LA UNIDAD SEGUIDA DE CEROS

Para dividir un número terminado en ceros por 10, 100, 1000... eliminamos en el número tantos ceros finales como ceros tenga el divisor.



Ejemplo: $754.000 : 100 = 7.540$

25. PROPIEDAD FUNDAMENTAL DE LA DIVISIÓN

Si multiplicamos o dividimos el dividendo y el divisor por un mismo número el cociente no varía, pero el resto queda multiplicado o dividido por el mismo número.

Ejemplo: División inicial: $11 : 4 = 2$ y de resto 3
Multiplico dividendo y divisor por 3: $11 \times 3 = 33$ $4 \times 3 = 12$
Divido los resultados obtenidos: $33 : 12 = 2$ y de resto sale 9, que es igual al primer resto: 3, multiplicado por 3.

26. JERARQUÍA DE CÁLCULO EN OPERACIONES COMBINADAS

Cuando no hay paréntesis, primero se resuelven las multiplicaciones y las divisiones, y después las sumas y las restas.

Ejemplo: $4 + 6 \times 5 - 3 = 4 + 30 - 3 = 31$

Cuando hay paréntesis, primero se realizan las operaciones que están dentro del paréntesis y luego las de fuera.

Ejemplo: $(4 + 6) \times (5 - 3) = 10 \times 2 = 20$

UNIDAD 10. FIGURAS PLANAS: POLÍGONOS CIRCUNFERENCIA Y CÍRCULO

1. POLÍGONOS: DEFINICIÓN, ELEMENTOS Y CLASIFICACIÓN.
2. POLÍGONOS REGULARES E IRREGULARES.
3. TRIÁNGULOS Y CUADRILÁTEROS: CLASIFICACIÓN.
4. PERÍMETRO Y ÁREA DE TRIÁNGULOS, CUADRILÁTEROS Y POLÍGONOS REGULARES.
5. CIRCUNFERENCIA Y CÍRCULO: DEFINICIÓN Y ELEMENTOS.
6. FIGURAS CIRCULARES.
7. LONGITUD DE LA CIRCUNFERENCIA Y ÁREA DEL CÍRCULO.

1. POLÍGONOS: DEFINICIÓN, ELEMENTOS Y CLASIFICACIÓN

Un polígono es el área comprendida dentro de una línea poligonal cerrada. En un polígono podemos enumerar los siguientes elementos:

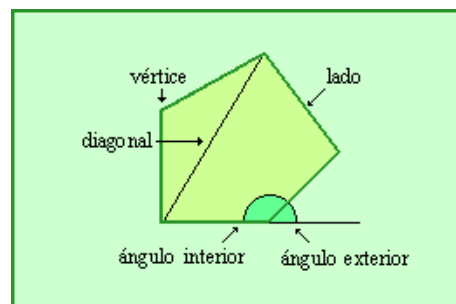
Lados: son los segmentos que limitan el polígono.

Vértices: son los puntos de unión de dos lados (los picos).

-Ángulos: son las regiones comprendidas entre dos lados que se juntan (los rincones).

-Diagonales: son los segmentos que unen dos vértices no consecutivos.

-Apotema: es el segmento que une el centro del polígono con la mitad del lado.

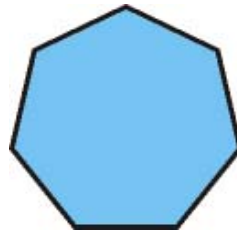
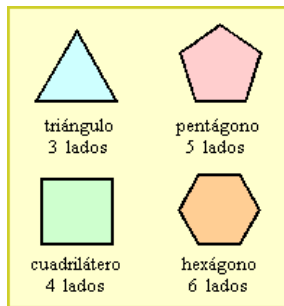


2. LONGITUD

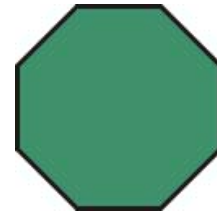
Los polígonos se clasifican según el número de lados en:

- Triángulos, cuando tienen 3 lados.
- Cuadriláteros, cuando tienen 4 lados.
- Pentágonos, cuando tienen 5 lados.
- Hexágonos, cuando tienen 6 lados.

- Heptágonos, cuando tienen 7 lados.
- Octógonos, cuando tienen 8 lados.
- Eneágonos, cuando tienen 9 lados.
- Decágonos, cuando tienen 10 lados.
- Y así sucesivamente.



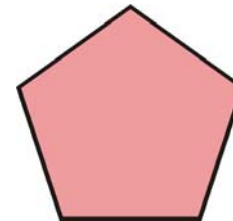
heptágono 7 lados



octógono 8 lados

3. POLÍGONOS REGULARES

Decimos que un polígono es regular cuando tiene todos los lados de la misma longitud y todos sus ángulos iguales.



cuadrado y pentágono regular.

4. CLASIFICACIÓN DE LOS TRIÁNGULOS

La capacidad se define como la magnitud que expresa el espacio contenido en un cuerpo. La principal unidad de medida de capacidad es el litro (l).

Los triángulos son los polígonos que tienen tres lados y tres vértices.

Por la *longitud de los lados* los triángulos pueden ser:

- **Equiláteros**, si tienen todos los lados iguales.
- **Isósceles**, si tienen dos lados iguales y uno desigual.

Por la *forma de los ángulos* los triángulos pueden ser:

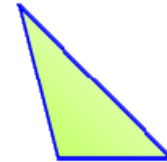
- **Rectángulos**, si tienen un ángulo recto.
- **Obtusángulos**, si tienen un ángulo obtuso.
- **Acutángulos**, si tienen los tres ángulos agudos.



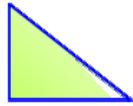
Equilátero



Isósceles



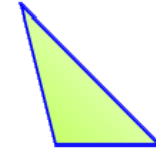
Escaleno



Rectángulo



Acutángulo



Obtusángulo

Recuerda: *ángulo recto* es el que tiene 90° , *ángulo agudo* el que tiene menos de 90° , *ángulo obtuso* el que tiene más de 90° y *ángulo llano* el que tiene 180° . Una circunferencia tiene 360° .

5. SUMA DE LOS ÁNGULOS DE UN TRIÁNGULO

Los tres ángulos de cualquier triángulo *suman 180° (dos ángulos rectos)*.

6. CLASIFICACIÓN DE LOS TRIÁNGULOS CUADRILÁTEROS

Los cuadriláteros son los polígonos que tienen cuatro lados y cuatro vértices. Se clasifican en paralelogramos y no paralelogramos.

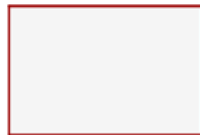
Los cuadriláteros **paralelogramos** son los que tienen los lados paralelos dos a dos y pueden ser **cuadrados, rectángulos, rombos y romboide**.

Los cuadriláteros **no paralelogramos** se dividen en **trapecios** (que sólo tienen dos lados paralelos) y **trapezoides** (que no tienen ningún lado paralelo).

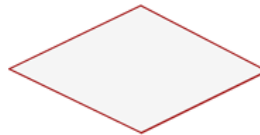
Cuadriláteros PARALELOGRAMOS



Cuadrado



Rectángulo



Rombo



Romboide

Cuadriláteros NO PARALELOGRAMOS



Trapecio rectángulo



Trapecio isósceles



Trapecio escaleno



Trapezoide

7. SUMA DE ÁNGULOS DE UN CUADRILÁTERO

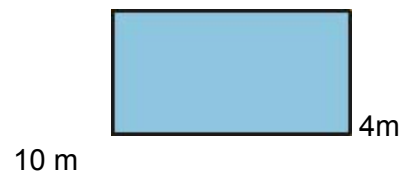
Los cuatro ángulos de cualquier cuadrilátero suman **360°**, que equivale a **cuatro ángulos rectos**.

8. PERÍMETRO DE UN POLÍGONO

El perímetro de un polígono es la **suma de la medida de todos sus lados**. Para hallar el perímetro de un polígono regular, como tiene todos los lados iguales, basta multiplicar la medida de un lado por el número de lados que tiene.

Ejemplo: Calcula el perímetro de un rectángulo que mide 10 m de largo y 4 de ancho.

$$\text{Perímetro} = 10 + 10 + 4 + 4 = 20 \text{ metros}$$



9. ÁREA DEL TRIÁNGULO

El área del triángulo es igual al *producto de la base por la altura dividido por dos*.

$$A = (b \times h) : 2$$

Ojo: La *altura* de un triángulo es la perpendicular que va desde el vértice a la base o a una prolongación de la misma.

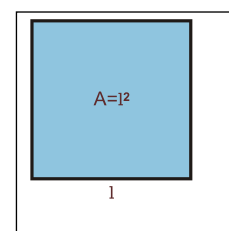
Ejemplo: Halla el área de un triángulo que tiene 25 cm de base y 30 de altura.

$$A = (b \times h) : 2 = (25 \times 30) : 2 = 750 : 2 = 385 \text{ cm}^2$$

10. ÁREA DEL CUADRADO

El área del cuadrado es igual al producto de lado por lado.

$$A = \text{lado} \times \text{lado} = l \times l = l^2$$



11. ÁREA DEL RECTÁNGULO

El área del rectángulo es igual al *producto de la base por la altura*.

$$A = \text{base} \times \text{altura} = b \times h$$

12. ÁREA DEL ROMBOIDE

El área del romboide es igual al *producto de la base por la altura*.

$$A = \text{base} \times \text{altura} = b \times h$$

13. ÁREA DEL ROMBO

El área del rombo es igual al producto de la diagonal mayor por la diagonal menor dividido por dos.

$$A = (\text{diagonal mayor} \times \text{diagonal menor}) : 2 = (D \times d) : 2$$

Recuerda: Diagonal es cada uno de los segmentos que unen dos vértices no consecutivos. El rombo tiene dos diagonales.

Ejemplo: Halla el área de un rombo sabiendo que sus diagonales miden respectivamente 20 y 30 cm cada una.

$$A = (D \times d) : 2 = (20 \times 30) : 2 = 600 : 2 = 300 \text{ cm}^2$$

14. ÁREA DE LOS POLÍGONOS REGULARES

Para calcular el área de un polígono regular multiplicamos el perímetro por la apotema y dividimos por dos.

$$A = (\text{Perímetro} \times \text{apotema}) : 2 = (\text{n}^\circ \text{ de lados} \times \text{lado} \times \text{apotema}) : 2$$

Ejemplo: Calcula el área de un octógono que tiene 5 cm de lado y 3 cm de apotema.

El octógono tiene 8 lados.

$$A = (\text{Perímetro} \times \text{apotema}) : 2 = (\text{n}^\circ \text{ de lados} \times \text{lado} \times \text{apotema}) : 2 = \\ = (8 \text{ lados} \times 5 \text{ cm} \times 3 \text{ cm}) : 2 = 120 : 2 = 60 \text{ cm}^2$$

Recuerda: - **Apotema** es el segmento que une el centro del polígono con la mitad del lado.

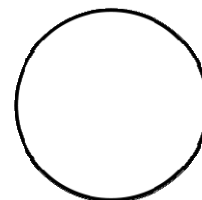
- Un polígono es regular cuando tienen todos los lados de la misma longitud y todos sus ángulos iguales.

- Para hallar el perímetro de un polígono regular, como tiene todos los lados iguales, basta multiplicar la medida de un lado por el número de lados que tiene.

15. LA CIRCUNFERENCIA Y EL CÍRCULO: DEFINICIÓN

Una **circunferencia** es una línea curva, plana y cerrada cuyos puntos están a la misma distancia de un punto interior llamado centro. Por tanto la circunferencia tiene longitud, pero no superficie.

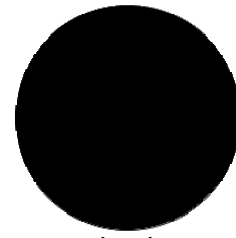
Ejemplos de circunferencia: anillo, aro.



circunferencia

Un **círculo** es la *superficie plana comprendida dentro de una circunferencia*.

Ejemplos de círculo: moneda, disco



círculo

16. ELEMENTOS DE LA CIRCUNFERENCIA Y EL CÍRCULO

Cuerda: es el segmento que une dos puntos de la circunferencia.

Radio: es el segmento que va desde cualquier punto de la circunferencia hasta el centro.

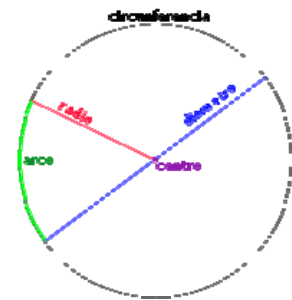
Diámetro: es la cuerda que pasa por el centro y equivale a dos radios.

$$\text{Diámetro} = 2 \times \text{radio}$$

Arco: es la parte de circunferencia comprendida entre dos puntos.

El diámetro divide a la circunferencia y al círculo en dos partes iguales que se llaman respectivamente *semicircunferencias* y *semicírculos*.

Dos circunferencias concéntricas son las que tienen el mismo centro.

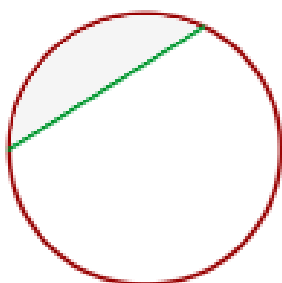


17. FIGURAS CIRCULARES: SECTOR, SEGMENTO Y CORONA CIRCULAR

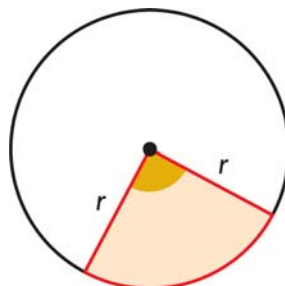
Sector circular: es la parte de círculo comprendida entre dos radios y su arco.

Segmento circular: es la parte de círculo comprendida entre una cuerda y su arco.

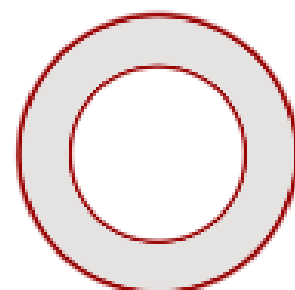
Corona circular: es la superficie comprendida entre dos circunferencias que tienen el mismo centro, pero distinto radio



Segmento circular



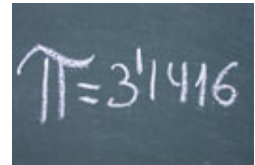
Sector circular



Corona circular

18. EL NÚMERO “PI” π

Es el resultado que sale siempre al dividir la longitud de cualquier circunferencia entre su diámetro. Su valor es aproximadamente 3,14.



$$L : d = \pi = 3,14$$

19. LONGITUD DE LA CIRCUNFERENCIA

Es el resultado que sale siempre al dividir la longitud de cualquier circunferencia entre su diámetro. Su valor es aproximadamente 3,14.

$$L = d \times \pi = 2 \times \pi \times r$$

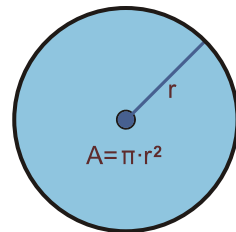
Ejemplo: Halla la longitud de una circunferencia que tiene 5 cm de radio.

$$L = 2 \times \pi \times r = 2 \times 3,14 \times 5 = 10 \times 3,14 = 31,4 \text{ cm}^2$$

20. ÁREA DEL CÍRCULO

El área del círculo es igual a π por el radio elevado al cuadrado.

$$A = \pi \times r^2$$



UNIDAD 2. MÚLTIPLOS Y DIVISORES

1. MÚLTIPLOS DE UN NÚMERO.
2. DIVISORES DE UN NÚMERO.
3. NÚMEROS PRIMOS Y NÚMEROS COMPUESTOS.
4. CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD.
5. MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO.
6. MÁXIMO COMÚN DIVISOR.

1. MÚLTIPLOS DE UN NÚMERO

Un número a es múltiplo de un número b si la división de a entre b es exacta.

Ejemplos: 24 es múltiplo de 8 porque la división $24:8$ es exacta.

35 no es múltiplo de 6 porque la división $35:6$ no es exacta.

Los múltiplos de un número se calculan multiplicando dicho número por los números naturales, es decir, por 1, 2, 3, 4, ...

El conjunto de los múltiplos de un número a se escribe así:

$$\dot{a} = \{ a \cdot 1, a \cdot 2, a \cdot 3, a \cdot 4, a \cdot 5, \dots \}$$

Ejemplo: Los múltiplos de 8 los calculamos multiplicando 8 por 1, por 2, por 3,

$$\dot{8} = \{ 8, 16, 24, 32, 40, 48, \dots \}$$

Podemos calcular tantos múltiplos como queramos, pues el conjunto de los múltiplos de un número es un conjunto infinito.

Con lo visto anteriormente, observamos que cualquier número es múltiplo de sí mismo y de la unidad.

Ejemplo: Comprobamos que 5 es múltiplo de 5 y de 1.

La división $5:5$ es exacta, por lo tanto 5 es múltiplo de 5.

La división $5:1$ es exacta, por lo tanto 5 es múltiplo de 1.

2. DIVISORES DE UN NÚMERO

Un número a es divisor de un número b si la división de b entre a es exacta.

Ejemplos: 5 es divisor de 30 porque la división $30:5$ es exacta.

9 no es divisor de 21 porque la división $21:9$ no es exacta.

Para calcular todos los divisores de un número, dividimos dicho número entre los números naturales, es decir, entre 1, 2, 3, ... hasta llegar a la división en la que el cociente sea menor que el divisor. De cada división exacta obtenemos dos divisores: el divisor y el cociente.

El conjunto de los divisores de un número a se escribe $\text{Div}(a)$.

Ejemplo: Vamos a calcular todos los divisores de 28.

Dividimos 28 entre 1, entre 2, entre 3, hasta llegar a una división en la que el cociente sea menor que el divisor:

$$\begin{array}{r} 28 \overline{) 1} \\ 08 \quad 28 \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 28 \overline{) 2} \\ 08 \quad 14 \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 28 \overline{) 3} \\ 1 \quad 9 \end{array} \quad \begin{array}{r} 28 \overline{) 4} \\ 0 \quad 7 \end{array} \quad \begin{array}{r} 28 \overline{) 5} \\ 3 \quad 5 \end{array} \quad \begin{array}{r} 28 \overline{) 6} \\ 4 \quad 4 \end{array}$$

No seguimos dividiendo ya que en la última división el cociente es menor que el divisor. Veamos que divisores hemos obtenido:

$28 : 1 = 28$ división exacta, entonces 1 y 28 son divisores

$28 : 2 = 14$ división exacta, entonces 2 y 14 son divisores

$28 : 4 = 7$ división exacta, entonces 4 y 7 son divisores

Por lo tanto, $\text{Div}(28) = \{1, 2, 4, 7, 14, 28\}$.

Es fácil observar que el 1 es divisor de cualquier número y que cualquier número es divisor de sí mismo.

3. NÚMEROS PRIMOS Y NÚMEROS COMPUESTOS

Un número a es primo si sólo tiene como divisores el 1 y él mismo.

Para saber si un número es primo hallamos sus divisores y si únicamente tiene dos divisores, el 1 y él mismo, entonces dicho número es primo.

Los primeros números primos son: 2, 3, 5, 7, 11, 13, ...

Un número es compuesto cuando no es primo, es decir, cuando tiene más de dos divisores.

El número 1 no se considera ni primo ni compuesto. Cualquier otro número natural o bien es primo o bien es compuesto.

Ejemplo: Los números 19 y 33, ¿son primos o compuestos?

Si calculamos los divisores de 19 y los de 33 obtenemos que:

$\text{Div}(19) = \{ 1, 19 \} \rightarrow$ 19 sólo tiene dos divisores, así pues es un número primo.

$\text{Div}(33) = \{ 1, 3, 11, 33 \} \rightarrow$ 33 tiene más de dos divisores, por lo tanto es un número compuesto.

4. CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD

Los criterios de divisibilidad son unas reglas que nos permiten saber si un número se puede dividir por otro (división exacta) sin realizar la división.

Entre los criterios existentes, los más importantes son los siguientes:

- Criterio del 2: un número es divisible por 2 si el número termina en 0 o en cifra par.
- Criterio del 3: un número es divisible por 3 si al sumar las cifras del número el resultado es múltiplo de 3.
- Criterio del 5: un número es divisible por 5 si el número termina en 0 o en 5.
- Criterio del 10: un número es divisible por 10 si el número termina en 0.

Ejemplo: Utiliza los criterios de divisibilidad para saber si el número 465 es divisible por 2, por 3, por 5 y por 10.

- **No** es divisible por 2 porque el número termina en 5 (cifra impar).
- **Sí** es divisible por 3 porque la suma de sus cifras da como resultado un múltiplo de 3.
$$4 + 6 + 5 = 15 \rightarrow 15 \text{ es múltiplo de } 3$$
- **Sí** es divisible por 5 porque el número termina en 5.
- **No** es divisible por 10 porque el número no termina en 0.

5. MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO

El mínimo común múltiplo (mcm) de dos o más números es el menor de todos los múltiplos que tienen en común dichos números.

El proceso que seguiremos para calcular el mcm de dos o más números será el siguiente:

1. Factorizamos los números, es decir, los descomponemos como producto de factores primos.
2. De las descomposiciones hechas, tomamos los factores primos comunes y no comunes elevados al mayor exponente.
3. El mcm será el producto de los factores tomados en el paso anterior.

Ejemplo: Hallar el mcm de 6 y 20.

Primero factorizamos ambos números:

$$\begin{array}{r|l}
 6 & 2 \\
 3 & 3 \\
 1 & \\
 \hline
 6 = 2 \cdot 3
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r|l}
 20 & 2 \\
 10 & 2 \\
 5 & 5 \\
 1 & \\
 \hline
 20 = 2^2 \cdot 5
 \end{array}$$

Una vez hechas las factorizaciones, observamos que nos aparecen los factores primos 2, 3 y 5, por lo tanto estos son los factores que tenemos que coger pero teniendo en cuenta que hay tomarlos elevados al mayor exponente, así que el 2 lo cogemos elevado al cuadrado.

Por lo tanto: $mcm(6,20) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$

6. MÁXIMO COMÚN DIVISOR

El máximo común divisor (mcd) de dos o más números es el mayor de todos los divisores que tienen en común dichos números.

El proceso a seguir para calcular el mcd de dos o más números será el siguiente:

1. Factorizamos los números, es decir, los descomponemos como producto de factores primos.
2. De las descomposiciones hechas, tomamos sólo los factores primos comunes elevados al menor exponente.
3. El mcd será el producto de los factores tomados en el paso anterior.

Ejemplo: Hallar el mcd de 72 y 60.

Factorizamos los números:

$$\begin{array}{r|l}
 72 & 2 \\
 36 & 2 \\
 18 & 2 \\
 9 & 3 \\
 3 & 3 \\
 1 & \\
 \hline
 72 = 2^3 \cdot 3^2
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r|l}
 60 & 2 \\
 30 & 2 \\
 15 & 3 \\
 5 & 5 \\
 1 & \\
 \hline
 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5
 \end{array}$$

Observamos que sólo hay dos factores comunes a ambas factorizaciones, que son el 2 y el 3, así pues éstos son los que tomaremos pero teniendo en cuenta que hay que cogerlos elevados al menor exponente.

$$\text{Por lo tanto, } \text{mcd}(72,60) = 2^2 \cdot 3 = 12$$

Si al calcular el mcd de varios números, éstos no tienen ningún factor primo en común, entonces el mcd es 1.

Ejemplo: Hallar el mcd de 14 y 45.

Factorizamos los números:

$$\begin{array}{r|l} 14 & 2 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$14 = 2 \cdot 7$$

$$\begin{array}{r|l} 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$45 = 3^2 \cdot 5$$

Observamos que no hay ningún factor en común a ambas factorizaciones, con lo cual el máximo común divisor de 14 y 45 es 1.

$$\text{mcd}(14,45) = 1$$

UNIDAD 3. POTENCIAS Y RAÍCES

1. LA POTENCIA Y SUS ELEMENTOS.
2. LAS POTENCIAS DE BASE 10.
3. LA RAÍZ CUADRADA.

1. LA POTENCIA Y SUS ELEMENTOS

Una potencia es una manera abreviada de escribir una multiplicación cuyos factores son iguales.

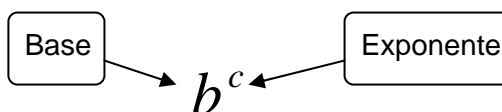
En la multiplicación $b \cdot b \cdot b \cdot \dots \cdot b$, el número b está multiplicado por sí mismo c veces. Mediante una potencia esta multiplicación se puede escribir así:

$$b^c = \underbrace{b \cdot b \cdot b \cdot \dots \cdot b}_{(c \text{ veces})}$$

| |
|---|
| <p><u>Ejemplos:</u> $3^6 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$; $12^4 = 12 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 12$</p> <p>$5^8 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$; $2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$</p> |
|---|

Los elementos de una potencia son:

- La **base**: es el número que se multiplica.
- El **exponente**: es el número de veces que se multiplica la base.



| |
|--|
| <p><u>Ejemplos:</u> $3^6 \rightarrow$ La base es 3 y el exponente es 6</p> <p>$12^4 \rightarrow$ La base es 12 y el exponente es 4</p> <p>$5^8 \rightarrow$ La base es 5 y el exponente es 8</p> <p>$2^5 \rightarrow$ La base es 2 y el exponente es 5</p> |
|--|

¿Cómo se lee una potencia? Se dice que la base se “eleva” al exponente o también se puede utilizar otra expresión dependiendo del exponente:

- Si el exponente es 2, se utiliza la expresión “al cuadrado”.
- Si el exponente es 3, se utiliza la expresión “al cubo”.

- Y si el exponente es 4, 5, 6, ..., se expresa con el ordinal, es decir, “a la cuarta”, “a la quinta”, “a la sexta”, etc.

Ejemplo. Veamos cómo se leen las siguientes potencias:

$$3^6 \rightarrow \text{“3 elevado a 6” o “3 a la sexta”}$$
$$12^4 \rightarrow \text{“12 elevado a 4” o “12 a la cuarta”}$$
$$5^8 \rightarrow \text{“5 elevado a 8” o “5 a la octava”}$$
$$2^5 \rightarrow \text{“2 elevado a 5” o “2 a la quinta”}$$
$$7^2 \rightarrow \text{“7 elevado a 2” o “7 al cuadrado”}$$
$$10^3 \rightarrow \text{“10 elevado a 3” o “10 al cubo”}$$

Para calcular el valor de una potencia sólo hay que realizar la multiplicación que nos indica la potencia, es decir, multiplicamos la base tantas veces como nos diga el exponente.

Ejemplo. Vamos a calcular las siguientes potencias:

$$3^6 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 729$$
$$12^4 = 12 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 12 = 20736$$
$$5^8 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 390625$$
$$2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$$
$$7^2 = 7 \cdot 7 = 49$$
$$10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$$

2. LAS POTENCIAS DE BASE 10

Una vez vistas las potencias y sus elementos, vamos a ver ahora unas potencias particulares: aquellas cuya base es 10. Son muy útiles porque nos sirven para expresar números muy grandes de una forma más simple y para descomponer números de forma “polinómica”.

Una potencia de base 10 se calcula de una forma muy sencilla ya que es igual a la unidad seguida de tantos ceros como indique el exponente.

Ejemplo. Vamos a calcular las siguientes potencias de base 10:

$$10^2 = 10 \cdot 10 = 100$$
$$10^5 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 100.000$$

Observa a continuación, mediante los dos siguientes ejemplos, cómo se utilizan estas potencias para descomponer números de forma “polinómica” y cómo expresar números grandes de forma más simple.

Ejemplo.

| <u>Número</u> | → | <u>Descomposición</u> | → | <u>Forma polinómica</u> |
|---------------|---|---|---|---|
| 273 | | $2 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 3$ | | $2 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 3$ |
| 92.148 | | $9 \cdot 10.000 + 2 \cdot 1.000 + 1 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 8$ | | $9 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 8$ |
| 5.601 | | $5 \cdot 1.000 + 6 \cdot 100 + 0 \cdot 10 + 1$ | | $5 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 1$ |

Ejemplo.

$$230.000.000 = 23 \cdot 10.000.000 = 23 \cdot 10^7$$
$$90.300.000 = 903 \cdot 100.000 = 903 \cdot 10^5$$
$$600.000.000 = 6 \cdot 100.000.000 = 6 \cdot 10^8$$

3. LA RAÍZ CUADRADA

La raíz cuadrada de un número es otro número que si lo elevamos al cuadrado obtenemos el primero. Es decir, para calcular la raíz cuadrada de un número tenemos que encontrar el número que multiplicado por sí mismo da como resultado el primer número. Esta operación se representa con el símbolo $\sqrt{\quad}$.

Ejemplo. Vamos a calcular las siguientes raíces cuadradas:

$$\sqrt{36} = 6 \text{ porque } 6^2 = 36$$
$$\sqrt{81} = 9 \text{ porque } 9^2 = 81$$
$$\sqrt{4} = 2 \text{ porque } 2^2 = 4$$
$$\sqrt{100} = 10 \text{ porque } 10^2 = 100$$

UNIDAD 4. NÚMEROS DECIMALES Y OPERACIONES

1. PARTES DE UN NÚMERO DECIMAL.
2. LECTURA Y ESCRITURA DE DECIMALES.
3. DESCOMPOSICIÓN DE NÚMEROS. DECIMALES Y VALOR RELATIVO DE LAS CIFRAS.
4. COMPARACIÓN Y ORDENACIÓN DE NÚMEROS DECIMALES.
5. REDONDEO DE NÚMEROS DECIMALES.
6. EXPRESIÓN DE LOS DECIMALES EN FORMA DE FRACCIÓN.
7. OPERACIONES CON NÚMEROS DECIMALES.

1. DÉCIMAS, CENTÉSIMAS Y MILÉSIMAS

Si dividimos una unidad en diez partes iguales, cada una es una *décima*.

Si dividimos una unidad en cien partes iguales, cada una es una *centésima*.

Si dividimos una unidad en mil partes iguales, cada una es una *milésima*.

| |
|---|
| 1 décima = $1 : 10 = 0,1$ |
| 1 centésima = $1 : 100 = 0,01$ |
| 1 milésima = $1 : 1000 = 0,001$ |

2. PARTES DE UN NÚMERO DECIMAL

Una fracción se puede aplicar a un número; esto es lo que se llama actuar como operador. Se hace multiplicando el número por el numerador y, después, el resultado se divide entre el denominador.

Los números decimales tienen dos partes separadas por una coma. **La parte entera va delante de la coma y está formada por unidades, decenas, centenas**, unidades de millar, decenas de millar, centenas de millar... **La parte decimal va detrás de la coma y está formada por décimas, centésimas, milésimas**, diezmilésimas, cienmilésimas...

| | | |
|-----------------|-----------------|-------------|
| <u>Ejemplo:</u> | Número decimal: | 234.698,125 |
| | Parte entera: | 234.698 |
| | Parte decimal: | 0,125 |

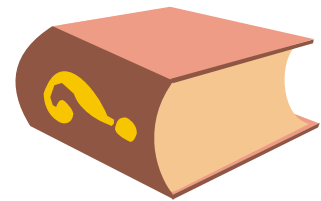
| Parte entera | | | | | | Parte decimal | | |
|--------------|----|----|---|---|----|---------------|---|---|
| CM | DM | UM | C | D | U | d | c | m |
| 2 | 3 | 4 | 6 | 9 | 8, | 1 | 2 | 5 |

Aclaración: **CM** = centena de millar, **DM** = decena de millar, **UM** = unidad de millar, **C** = centena, **D** = decena, **U** = unidad, **d** = décima, **c** = centésima, **m** = milésima.

3. LECTURA Y ESCRITURA DE NÚMEROS DECIMALES

Para leer un número decimal:

1º **Leemos por separado la parte entera y la parte decimal.**



Ejemplo: 234.698 unidades y 125 milésimas.

2º **Leemos la parte decimal y la parte entera separadas por la palabra coma.**

Ejemplo: 234.698 coma 125.

4. DESCOMPOSICIÓN DE NÚMEROS DECIMALES Y VALOR RELATIVO DE LAS CIFRAS

El valor de las cifras de un número decimal depende de la posición que ocupan. El 2 de la parte entera representa centenas de millar y vale 200.000, mientras que el 2 de la parte decimal corresponde a centésimas y vale 0,02.

Ejemplo: $234.698,125 =$
 $= 2 \text{ CM} + 3 \text{ DM} + 4 \text{ UM} + 6 \text{ C} + 9 \text{ D} + 8 \text{ U} + 1 \text{ d} + 2 \text{ c} + 5 \text{ m} =$
 $= 200.000 + 30.000 + 4.000 + 600 + 90 + 8 + 0,1 + 0,02 + 0,005$

5. COMPARACIÓN Y ORDENACIÓN DE NÚMEROS DECIMALES

Para comparar números decimales:

1º **Comparamos la parte entera y vemos cuál es la mayor. Es mayor el decimal que tiene la parte entera más grande.**

2º **Si coincide la parte entera, comparamos las décimas y vemos quién tiene más grande la cifra de las décimas.**

3º **Si coinciden las décimas, comparamos las cifras de las centésimas.**

4º Si coinciden las centésimas, comparamos las cifras de las milésimas.

5º Y así sucesivamente.

Ejemplo: $235,627 > 235,629$

Ambos números decimales tienen iguales las cifras de las centenas, decenas, unidades, décimas y centésimas; pero como el primero tiene la cifra de las milésimas (7) mayor que la cifra de las milésimas del segundo (9), el primer número es mayor que el segundo.

6. REDONDEO DE NÚMEROS DECIMALES

Para **redondear un número a las décimas**, eliminamos las cifras que van después de las décimas y si la cifra de las centésimas es menor que 5 se queda como está. Pero si la cifra de las centésimas es igual o mayor que 5, sumamos uno a las décimas.

Ejemplo: $34,268$ Redondeado a las décimas = $34,3$
 $49,239$ Redondeado a las décimas = $49,2$

Para **redondear un número a las centésimas**, eliminamos las cifras que van después de las centésimas y si la cifra de las milésimas es menor que 5 se queda como está. Pero si la cifra de las milésimas es igual o mayor que 5, sumamos uno a las centésimas.

Ejemplo: $34,216$ Redondeado a las centésimas = $34,22$
 $49,263$ Redondeado a las centésimas = $49,26$

Para **redondear un número a las unidades**, eliminamos las cifras que van después de la coma decimal y si la cifra de las décimas es menor que 5 nos quedamos con la parte entera como está. Pero si la cifra de las décimas es igual o mayor que 5, sumamos uno a la parte entera.

Ejemplo: $34,281$ Redondeado a las unidades = 34
 $49,529$ Redondeado a las decenas = 50

7. EXPRESIÓN DE LOS NÚMEROS DECIMALES EN FORMA DE FRACCIÓN

Para representar un decimal en forma de fracción **ponemos el número sin coma en el numerador y en el denominador la unidad seguida de tantos ceros como cifras tenga la parte decimal** del número considerado.

Ejemplo: $27,19 = 2.719 / 100$

8. SUMA Y RESTA DE NÚMEROS DECIMALES

Para **sumar** números decimales:

1º **Colocamos unos números debajo de otros, alineando las cifras de modo que las comas coincidan en columna.**

2º Procedemos a **sumar como en una suma normal.**

3º Y al final escribimos **la coma en el resultado, de modo que coincida debajo de las comas** que figuran en los números sumados.

Para **restar** números decimales:

1º **Colocamos el menor debajo del mayor, alineando sus cifras de modo que las comas coincidan en columna.**

2º Procedemos a restar como lo haríamos en una resta normal, pero teniendo en cuenta que **si faltan cifras decimales en el minuendo se colocan ceros.**

3º Y al final **escribimos la coma en el resultado**, de modo que coincida debajo de las comas que figuran en los números restados.

Ejemplo: $127,428 + 72,19 + 13,45 + 345 + 2,4 = 560,468$

$927,58 - 75,2543 = 852,3257$

Aclaración: Un número natural se puede escribir como decimal poniendo ceros detrás de la coma, ya que, por ejemplo, $35 = 35,0 = 35,00 = 35,000\dots$

9. MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS DECIMALES

Para multiplicar dos números decimales:

1º **Multiplicamos los números sin tener en cuenta las comas**, de igual modo que si se tratase de una multiplicación normal.

2º **Separamos en el resultado con una coma tantas cifras decimales como juntan entre los dos números multiplicados.**

$$\begin{array}{r} 315,25 \\ \times 42,1 \\ \hline 31525 \\ 63050 \\ 126100 \\ \hline 13272,50 \end{array}$$

$$315,25 \times 42,1 = 13.272,025$$

Como el primer número tiene dos decimales y el segundo uno, el resultado tendrá tres decimales.

10. DIVISIONES EQUIVALENTES

Recuerda que llamamos divisiones equivalentes a las que **tienen el mismo cociente**. Para obtener divisiones equivalentes basta con *multiplicar o dividir el dividendo y el divisor por un mismo número*.

$$2 : 8 = 0,25$$

Multiplicando dividendo y divisor por 10 resulta que $20 : 80 = 0,25$

$2 : 8$ y $20 : 80$ son divisiones equivalentes porque sale el mismo resultado en el cociente (0,25).



11. CASOS QUE SE DAN EN LA DIVISIÓN DE NÚMEROS DECIMALES

División de un número natural entre otro mayor: sale cociente decimal.- Cuando dividimos un número entre otro mayor:

1º Colocamos un cero en el cociente seguido de una coma.

2º Añadimos un cero en el dividendo.

3º Procedemos a dividir como una división normal.

$$\begin{array}{r} 9 \quad 0 \\ 0 \quad 6 \end{array} \overline{) 1 \quad 2} \\ \underline{0 \quad 7} \\ 5$$

División de un número decimal entre un número natural.- Para dividir un decimal entre un número natural:

1º Dividimos como en una división normal, es decir, como si ninguno de los números fuese decimal.

2º Pero al bajar la primera cifra decimal, ponemos una coma en el cociente, de modo que en el cociente resulta un número decimal.

$$\begin{array}{r} 9 \quad 2, \quad 6 \\ 4 \quad 2 \\ 0 \quad 2 \quad 6 \\ 0 \quad 1 \end{array} \overline{) 5} \\ \underline{1 \quad 8, \quad 5} \\ 5$$

División de un decimal por la unidad seguida de ceros.- Para dividir un número decimal por la unidad seguida de ceros basta desplazar la coma hacia la izquierda tantos lugares como ceros acompañan a la unidad.

$$45,26 : 10 = 4,526 \quad 34.278,3 : 100 = 342,783 \quad 59.120,2 : 1.000 = 59,1202$$

División de un número natural entre un número decimal.- Para dividir un número natural por un decimal:

1º Quitamos los decimales del divisor.

2º Añadimos tantos ceros en el dividendo como cifras decimales tenía el divisor.

3º Procedemos a dividir como lo haríamos en una división normal.

$$\begin{array}{r} 7 \quad 3 \quad 5 \quad 0 \\ 3 \quad 1 \quad 5 \\ 0 \quad 2 \quad 1 \quad 0 \\ 0 \quad 0 \quad 0 \end{array} \overline{) 4 \quad 2} \\ \underline{1 \quad 7 \quad 5} \\ 5$$

Lo que realmente hemos hecho ha sido transformar la división en otra equivalente, pero sin decimales en el divisor. O sea, multiplicar dividendo y divisor por la unidad seguida de tantos

ceros como sean necesarios (10, 100, 1.000, 10.000....) para que desaparezca la coma decimal del divisor.

Para dividir 735 entre 4,2 quitamos la cifra decimal del divisor y añadimos un 0 al dividendo, con lo que nos queda $7.350 : 42$, que es una división equivalente, en la que sale el mismo cociente y que se realiza como un caso de división entre números naturales (realmente hemos multiplicado dividendo y divisor por 10).

$$735 : 4,2 = 175 \qquad 7350 : 42 = 175$$

División de dos números decimales.- Para dividir dos números decimales:

1º Quitamos los decimales del divisor.

2º Desplazamos la coma en el dividendo tantos lugares como cifras decimales tenía el divisor (si es necesario, añadimos ceros).

$$\begin{array}{r} 7350 \mid 42 \\ 315 \\ 0210 \\ 000 \end{array}$$

3º Procedemos a dividir como lo haríamos en una división normal o en una división de decimal entre natural, que ya hemos visto con anterioridad.

Lo que realmente hemos hecho ha sido transformar la división en otra equivalente, pero sin decimales en el divisor. O sea, multiplicar dividendo y divisor por la unidad seguida de tantos ceros como sean necesarios (10, 100, 1.000, 10.000....) para que desaparezca la coma decimal del divisor.

Para dividir 73,5 entre 0,42 quitamos las cifras decimales del divisor y desplazamos la coma en el dividendo dos lugares hacia la derecha. Como solo tiene un decimal el dividendo, quitamos la coma y añadimos un cero. Con lo que nos queda $7.350 : 42$, que es una división equivalente, en la que sale el mismo cociente y que se realiza como un caso de división entre números naturales (coincide con la realizada el apartado anterior). (realmente hemos multiplicado dividendo y divisor por 10).



que
la
de
en

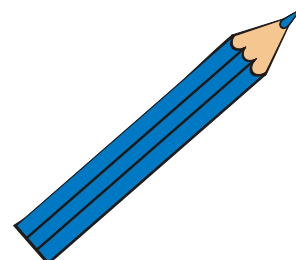
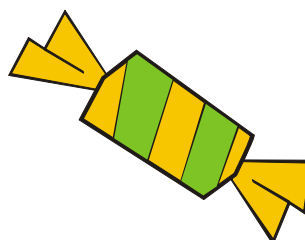
$$73,5 : 0,42 = 175 \qquad 7350 : 42 = 175$$

División entre dos números naturales para que salga cociente decimal.- Se procede como en una división de decimal entre número natural, para lo cual basta añadir una coma decimal en el dividendo y poner tantos ceros detrás como cifras decimales pretendamos obtener en el cociente.

Si queremos dividir 73 entre 4 y que en el cociente obtengamos dos cifras decimales, lo que tenemos que hacer es añadir dos ceros decimales al dividendo y resolver la división correspondiente.

$$\begin{array}{r} 73,00 \mid 4 \\ 050 \\ 160 \\ 24 \end{array}$$

$$73 : 4 = 73,00 : 4 = 2,14$$



UNIDAD 5. FRACCIONES Y OPERACIONES

1. FRACCIONES.
2. LA FRACCIÓN COMO OPERADOR Y COMO NÚMERO.
3. FRACCIONES EQUIVALENTES.
4. REDUCCIÓN DE FRACCIONES A COMÚN DENOMINADOR.
5. OPERACIONES CON FRACCIONES.

1. FRACCIONES

Una fracción es una expresión de la forma $\frac{a}{b}$, siendo a y b números naturales.

$a \rightarrow$ numerador
 $b \rightarrow$ denominador

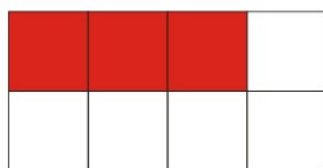
Las fracciones se utilizan para representar una parte respecto a un todo, que llamamos la unidad.

- Denominador: indica el número de partes iguales en que está dividida la unidad.
- Numerador: indica el número de partes que tomamos de la unidad.

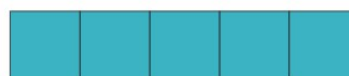
Las fracciones pueden ser:

- ◆ Menores que la unidad: son aquellas en las que el numerador es menor que el denominador. También se llaman fracciones propias.
- ◆ Mayores que la unidad: son aquellas en las que el numerador es mayor que el denominador. También se llaman fracciones impropias.
- ◆ Igual que la unidad: son aquellas en las que el numerador es igual que el denominador.

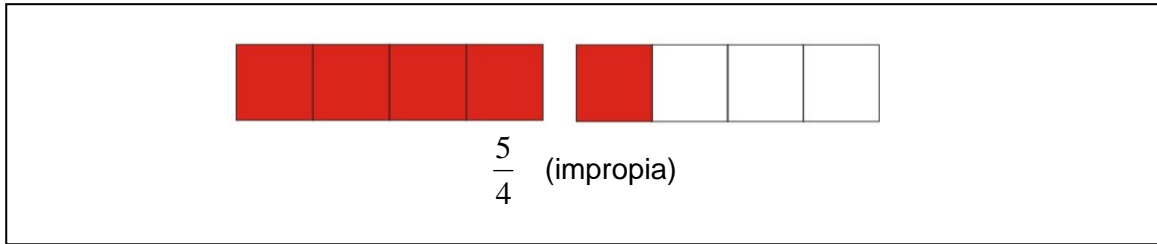
Ejemplo. Representaremos una fracción propia, una impropia y una igual que la unidad.



$\frac{3}{8}$ (propia)



$\frac{5}{5}$ (igual que la unidad)



¿Cómo se lee una fracción? El numerador se lee tal cual sea el número. En cambio, el denominador se lee según el número que haya: 2 → medios, 3 → tercios, 4 → cuartos, 5 → quintos, 6 → sextos, 7 → séptimos, 8 → octavos, 9 → novenos, 10 → décimos. Y del 11 en adelante se lee el número añadiendo –avos.

Ejemplo. Veamos cómo se leen las siguientes fracciones:

| | | |
|------------------------------------|-------------------------------|----------------------------------|
| $\frac{3}{12}$ → Tres doceavos | $\frac{7}{5}$ → Siete quintos | $\frac{3}{20}$ → Tres veinteavos |
| $\frac{18}{4}$ → Dieciocho cuartos | $\frac{1}{9}$ → Un noveno | $\frac{6}{2}$ → Seis medios |

2. LA FRACCIÓN COMO OPERADOR Y COMO NÚMERO

Una fracción se puede aplicar a un número; esto es lo que se llama actuar como operador. Se hace multiplicando el número por el numerador y, después, el resultado se divide entre el denominador.

Ejemplo.

$$\frac{2}{3} \text{ de } 45 = \frac{2 \cdot 45}{3} = \frac{90}{3} = 30$$

$$\frac{5}{7} \text{ de } 14 = \frac{5 \cdot 14}{7} = \frac{70}{7} = 10$$

Ejemplo. En la clase de mi hermana hay 18 chicos y $\frac{1}{3}$ de ellos son rubios.
¿Cuántos chicos rubios son?

$$\frac{1}{3} \text{ de } 18 = \frac{1 \cdot 18}{3} = \frac{18}{3} = 6 \quad \rightarrow \text{ Hay 6 chicos rubios en la clase.}$$



Las fracciones también se pueden entender como números. Para ello no hay más que realizar la división que expresa la fracción: el numerador entre el denominador. El resultado puede ser un número natural o un número decimal.

Ejemplo.

$$\frac{3}{4} = 0,75$$

$$\frac{7}{5} = 1,4$$

$$\frac{9}{3} = 3$$

$$3 \overset{0}{\underset{0}{\mid}} 4$$

$$7 \overset{\mid}{\underset{0}{\mid}} 5$$

$$9 \overset{\mid}{\underset{0}{\mid}} 3$$

$$20 \quad 0,75$$

$$20 \quad 1,4$$

$$0 \quad 3$$

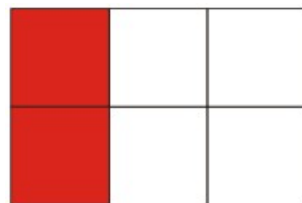
0

0

3. FRACCIONES EQUIVALENTES

Dos fracciones son equivalentes si representan la misma parte de la unidad.

Ejemplo. Las fracciones $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{6}$ son equivalentes, pues como vemos en los dibujos representan la misma parte de la unidad.



$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$$

Otra forma de saber si dos fracciones son equivalentes es si al multiplicar “en cruz” los numeradores y denominadores de ambas fracciones se obtiene el mismo resultado.

Ejemplo.

$$\frac{1}{3} \text{ y } \frac{2}{6} \rightarrow \begin{cases} 3 \times 2 = 6 \\ 1 \times 6 = 6 \end{cases} \text{ Estas dos fracciones son equivalentes.}$$

$$\frac{3}{4} \text{ y } \frac{9}{12} \rightarrow \begin{cases} 4 \times 9 = 36 \\ 3 \times 12 = 36 \end{cases} \text{ Estas dos fracciones son equivalentes.}$$

$$\frac{3}{7} \text{ y } \frac{4}{10} \rightarrow \begin{cases} 7 \times 4 = 28 \\ 3 \times 10 = 30 \end{cases} \text{ Estas dos fracciones } \underline{\text{no}} \text{ son equivalentes.}$$

Hay dos formas de obtener fracciones equivalentes a una fracción: por amplificación y por simplificación.

- ◆ **Amplificación:** si multiplicamos el numerador y el denominador de una fracción por un mismo número, obtenemos una fracción equivalente.
- ◆ **Simplificación:** si dividimos el numerador y el denominador de una fracción por un mismo número, obtenemos una fracción equivalente.

Una fracción se llama irreducible cuando no se puede simplificar.

Ejemplo. Vamos a obtener dos fracciones equivalentes a $\frac{12}{18}$ por amplificación y otras dos por simplificación.

Por amplificación: $\frac{12}{18} = \frac{12 \times 2}{18 \times 2} = \frac{24}{36}$ $\frac{12}{18} = \frac{12 \times 3}{18 \times 3} = \frac{36}{54}$

Por simplificación: $\frac{12}{18} = \frac{12 : 3}{18 : 3} = \frac{4}{6}$ $\frac{12}{18} = \frac{12 : 6}{18 : 6} = \frac{2}{3}$

Las 4 fracciones obtenidas son todas equivalentes a $\frac{12}{18}$.

Ejemplo. Vamos a simplificar la fracción $\frac{36}{48}$ hasta llegar a la fracción irreducible.

$$\frac{36}{48} = \frac{36 : 2}{48 : 2} = \frac{18}{24} = \frac{18 : 2}{24 : 2} = \frac{9}{12} = \frac{9 : 3}{12 : 3} = \frac{3}{4}$$

4. REDUCCIÓN DE FRACCIONES A COMÚN DENOMINADOR

Reducir fracciones a común denominador es encontrar fracciones equivalentes a ellas con un mismo denominador. Se hace de la siguiente forma:

1º) Calculamos el mínimo común múltiplo de los denominadores y éste será el nuevo denominador de las fracciones.

2º) Después se calculan los numeradores dividiendo el nuevo denominador entre el anterior y multiplicando por el numerador.

Ejemplo. Vamos a reducir las fracciones $\frac{2}{5}$ y $\frac{3}{4}$ a común denominador.

Primero calculamos el $mcm(5,4)$:

$$\begin{array}{r|l} 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \quad mcm(5,4) = 2^2 \cdot 5 = 20$$

Así pues, el común denominador va a ser 20 y las fracciones serán:

$$\frac{2}{5} = \frac{\quad}{20} \qquad \frac{3}{4} = \frac{\quad}{20}$$

Ahora sólo nos falta calcular el numerador de cada fracción:

$$\begin{array}{l} 20 : 5 = 4 \\ 4 \times 2 = 8 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 20 : 4 = 5 \\ 5 \times 3 = 15 \end{array}$$

Por lo tanto, las fracciones reducidas a común denominador son:

$$\frac{2}{5} = \frac{8}{20} \qquad \frac{3}{4} = \frac{15}{20}$$

Como vemos, hemos encontrado dos fracciones equivalentes a $\frac{2}{5}$ y $\frac{3}{4}$ con un mismo denominador.

La reducción de fracciones a común denominador se aplica para sumar y restar fracciones, como veremos en el apartado siguiente. También se utiliza para comparar (ordenar) fracciones.

Para comparar u ordenar fracciones tenemos que reducirlas a común denominador y, una vez hecho esto, se comparan los numeradores. Será mayor la que tenga mayor numerador y, de igual forma, será menor la que tenga menor denominador.

Ejemplo. Ordena de mayor a menor las siguientes fracciones $\frac{5}{8}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$.

En primer lugar las reducimos a común denominador:

$$\frac{5}{8}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$$

→

$$\frac{5}{8}, \frac{4}{8}, \frac{6}{8}$$

$$\text{mcm}(8,2,4) = 8$$

Ahora que ya están reducidas al mismo denominador, se comparan los numeradores. La ordenación de mayor a menor será:

$$\frac{6}{8} > \frac{5}{8} > \frac{4}{8}$$

O lo que es lo mismo, ordenando las fracciones originales:

$$\frac{3}{4} > \frac{5}{8} > \frac{1}{2}$$

5. OPERACIONES CON FRACCIONES

SUMA Y RESTA DE FRACCIONES

Se distinguen dos casos:

- 1º) Si las fracciones tienen el mismo denominador.
- 2º) Si las fracciones tienen distinto denominador.

1º) Para sumar o restar fracciones con el mismo denominador se suman o restan los numeradores y el denominador se deja igual.

Ejemplo. Sumas y restas con el mismo denominador.

$$\frac{4}{3} + \frac{7}{3} = \frac{4+7}{3} = \frac{11}{3}$$

$$\frac{7}{9} - \frac{5}{9} = \frac{7-5}{9} = \frac{2}{9}$$

$$\frac{5}{4} + \frac{7}{4} - \frac{2}{4} = \frac{5+7-2}{4} = \frac{10}{4}$$

2º) Para sumar o restar fracciones con distinto denominador hay que reducirlas primero a común denominador, y después se suman o restan como fracciones que tienen el mismo denominador.

Ejemplo. Sumas y restas de fracciones con distinto denominador.

$$\frac{5}{3} + \frac{1}{2} = \frac{10}{6} + \frac{3}{6} = \frac{10+3}{6} = \frac{13}{6}$$

$$mcm(3,2) = 6$$

$$\frac{8}{5} - \frac{2}{3} = \frac{24}{15} - \frac{10}{15} = \frac{24-10}{15} = \frac{14}{15}$$

$$mcm(5,3) = 15$$

$$\frac{3}{6} + \frac{7}{4} - \frac{3}{2} = \frac{6}{12} + \frac{21}{12} - \frac{18}{12} = \frac{6+21-18}{12} = \frac{9}{12}$$

$$mcm(6,4,2) = 12$$

MULTIPLICACIÓN DE FRACCIONES

El resultado de multiplicar dos o más fracciones es otra fracción cuyo numerador es el producto de los numeradores y el denominador es el producto de los denominadores.

Ejemplo.

$$\frac{7}{3} \times \frac{4}{6} = \frac{7 \times 4}{3 \times 6} = \frac{28}{18}$$

$$\frac{5}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{5 \times 1 \times 2}{2 \times 3 \times 5} = \frac{10}{30}$$

DIVISIÓN DE FRACCIONES

El resultado de dividir dos fracciones es otra fracción cuyo numerador es el producto del numerador de la primera por el denominador de la segunda, y el denominador es el producto del denominador de la primera por el numerador de la segunda. Esto es lo que se llama multiplicar “en cruz” las fracciones.

Ejemplo.

$$\frac{5}{8} : \frac{7}{2} = \frac{5 \times 2}{8 \times 7} = \frac{10}{56}$$

$$\frac{9}{7} : \frac{5}{3} = \frac{9 \times 3}{7 \times 5} = \frac{27}{35}$$

Nota: recuerda, para terminar, que cualquier número se puede poner como una fracción con denominador 1.

Ejemplo.

$$\frac{2}{7} \times 3 = \frac{2}{7} \times \frac{3}{1} = \frac{2 \times 3}{7 \times 1} = \frac{6}{7}$$

$$4 : \frac{5}{6} = \frac{4}{1} : \frac{5}{6} = \frac{4 \times 6}{1 \times 5} = \frac{24}{5}$$

UNIDAD 6. PORCENTAJES Y PROPORCIONALIDAD

1. EL PORCENTAJE O TANTO POR CIENTO.
2. CANTIDADES Y MAGNITUDES PROPORCIONALES.
3. TABLAS DE EQUIVALENCIAS.
4. LA ESCALA.

1. EL PORCENTAJE O TANTO POR CIENTO

El porcentaje representa **una parte del total**. Se expresa con un **número seguido del símbolo %**. También se representa con una **fracción de denominador 100**.

| Porcentaje | Lectura | Significado | Fracción |
|------------|---------------|----------------------|------------------|
| 25 % | 25 por ciento | 25 casos de cada 100 | $\frac{25}{100}$ |

Si al 25 % de los alumnos del colegio le gusta jugar a baloncesto no quiere decir que a 25 alumnos del colegio les gusta el baloncesto, sino que de cada grupo de 100 le gusta el baloncesto a 25.

2. CÁLCULO DEL PORCENTAJE O TANTO POR CIENTO

Para calcular el porcentaje de una cantidad **se multiplica el número del porcentaje por la cantidad y se divide por cien**.

Ejemplo: Si el colegio tiene 300 alumnos, para saber el número de alumnos a los que les gusta practicar el baloncesto basta calcular el 25 % de 300.

$$25\% \text{ de } 300 = (25 \times 300) : 100 = 7.500 : 100 = 75$$

75 son los alumnos del colegio a los que les gusta practicar el baloncesto.

3. APLICACIÓN DEL PORCENTAJE O TANTO POR CIENTO A PROBLEMAS DE LA VIDA REAL

Situaciones de descuento: Calculamos el valor del descuento y se lo restamos al valor inicial.

Situaciones de aumento o recargo: Calculamos el valor del aumento o del recargo y se lo sumamos al valor inicial.

Ejemplo de **descuento**: El pantalón de Pablo valía 40 euros. Si en las rebajas de enero le hacen un descuento del 30%, ¿cuánto debe pagar?

$$\begin{aligned} \text{Descuento} &= 30\% \text{ de } 40 = (30 \times 40) : 100 = 1.200 : 100 = 12 \text{ euros} \\ 40 - 12 &= 28 \text{ euros debe pagar} \end{aligned}$$

Ejemplo de **aumento o recargo**: La falda que quiere comprar Rita cuesta 30 euros sin IVA en la tienda. Si el IVA es del 16%, ¿a cuánto asciende la compra de Rita?

$$\begin{aligned} \text{Aumento} &= 16\% \text{ de } 30 = (16 \times 30) : 100 = 480 : 100 = 4,8 \text{ euros} \\ 30 + 4,8 &= 34,8 \text{ euros} \end{aligned}$$

A 34 euros y 80 céntimos asciende la compra de Rita.

4. CANTIDADES PROPORCIONALES

Dos cantidades son proporcionales si **a medida que una aumenta o disminuye la otra aumenta o disminuye en la misma proporción**.

Para comprobar si dos cantidades son proporcionales basta con comprobar si a doble de una corresponde doble de la otra, si al triple de la una corresponde el triple de la otra, si a la mitad de la una corresponde la mitad de la otra y así sucesivamente.



| | | | | | | | |
|---------------|----|----|----|----|----|----|----|
| Nº de docenas | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| Nº de huevos | 12 | 24 | 36 | 48 | 60 | 72 | 84 |

Para pasar de docenas a huevos se multiplica por 12 y para pasar de huevos a docenas se divide por 12.

La cantidad de huevos y la cantidad de docenas de huevos son cantidades proporcionales porque a doble número de huevos corresponde doble número de docenas, a triple número de huevos corresponde triple número de docenas y a mitad de número de huevos corresponde la mitad de docenas.

Cuando tenemos dos series de cantidades proporcionales para pasar de una a otra se multiplica o se divide por un mismo número (en el caso de los huevos y las docenas por 12).

5. TABLAS DE EQUIVALENCIAS

Para escribir dos series de cantidades proporcionales recurrimos a **tablas de equivalencia**, como la que expresa el número de docenas y el número de huevos del apartado anterior.

Para construir tablas de equivalencia basta averiguar la regla que siguen las cantidades y **ver por qué número se divide o multiplica la primera fila para obtener la segunda**. En el caso de las docenas y los huevos se multiplican las docenas por 12 para hallar las cantidades correspondientes a los huevos. En el siguiente ejemplo basta

multiplicar el nº de sacos por 20 o en dividir el peso en kg entre 20 para obtener la tabla de equivalencia.

| | | | | | | |
|-----------------|----|----|----|-----|-----|-----|
| Número de sacos | 1 | 2 | 3 | ... | 26 | ... |
| Peso en kg | 20 | 40 | 60 | ... | 520 | ... |

6. MAGNITUDES PROPORCIONALES

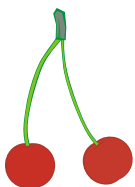
Dos magnitudes son proporcionales si **a medida que las cantidades de la una aumentan o disminuyen las de la otra aumentan o disminuyen en la misma proporción**. Es decir, con ambas magnitudes podemos formar dos series de cantidades proporcionales.



Los **kilos de fresas** comprados y el **precio total** pagado son **magnitudes proporcionales**.



7. CÁLCULO DE CANTIDADES PROPORCIONALES



Para calcular cantidades proporcionales y construir las correspondientes tablas de equivalencia:

- 1º **Escribimos la tabla de equivalencias** con los datos que disponemos.
- 2º **Reducimos a la unidad**, es decir, calculamos el valor que corresponde al 1.
- 3º **Calculamos el dato o los datos que nos faltan**.

Ejemplo: La madre de Jaimito, que vende cerezas de su cosecha, ha puesto un cartel en su puerta que dice: 4 kg a 12 euros. Si quiero comprar 5 kilogramos, ¿cuánto debo pagar?

| | | |
|-------------------|----|---|
| kilogramos | 4 | 5 |
| Euros | 12 | ? |

1º Tabla con datos que me dan.

| | | |
|-------------------|----|----------|
| kilogramos | 4 | 1 |
| euros | 12 | 3 |

2º Divido arriba y abajo entre 4. Resulta que 1 kg vale 3 euros.

| | | | |
|-------------------|----|----------|-----------|
| kilogramos | 4 | 1 | 5 |
| euros | 12 | 3 | 15 |

3º Regla para pasar de la fila de los kg a la de los euros: se multiplica por 3. O lo que es lo mismo: multiplico los valores en azul por 5.

Por 5 kg de cerezas debo pagar 15 euros.

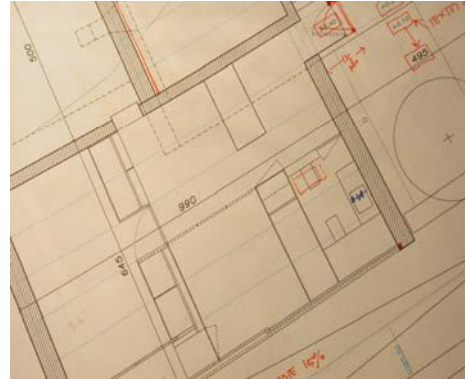
8. UN CASO DE PROPORCIONALIDAD: LA ESCALA

La escala de mapas y planos es un caso de proporcionalidad y se expresa con un cociente. **El número pequeño representa la distancia medida en el plano y el grande la distancia proporcional que le corresponde en la realidad.**

Ejemplo: Si el plano de una casa tiene como escala 1:50, quiere decir que cada cm que midamos sobre el papel corresponde a 50 cm en la realidad.

1 cm del mapa = 50 cm en la realidad.
50 cm = 0,5 m

Por tanto cada cm medido en el plano de la casa equivale a medio m real en la casa edificada.



Plano de una casa Escala 1 : 50

UNIDAD 7. LOS NÚMEROS ENTEROS

1. LOS NÚMEROS ENTEROS
2. REPRESENTACIÓN Y ORDENACIÓN DE NÚMEROS ENTEROS
3. OPERACIONES CON NÚMEROS ENTEROS

1. LOS NÚMEROS ENTEROS

En la vida se nos presentan muchas veces situaciones que no pueden expresarse mediante los números naturales. En este caso se necesitan otro tipo de números, que son los números enteros.

Los números enteros son:

- Positivos: +1, +2, +3, +4, +5,
- Negativos: -1, -2, -3, -4, -5,
- El cero: 0. (El cero es el único número que no es ni positivo ni negativo).

Los números positivos expresan situaciones relacionadas con ‘sumar’, ‘tener’, ‘estar por encima de’, etc. En cambio, los negativos se relacionan con situaciones de ‘restar’, ‘deber’, ‘estar por debajo de’, ‘gastar’, etc.

Ejemplo.



Para medir la temperatura de cualquier lugar se utilizan los termómetros (dibujo). Las temperaturas que están por encima de los 0 grados se expresan con los números positivos, y las que están por debajo de los 0 grados lo hacen con los números negativos.

Observando el termómetro vemos que:

- Si el termómetro marca $+3^{\circ}$ y la temperatura baja 5° , el termómetro marcará -2° .
- Si el termómetro marca -1° y la temperatura sube 8° , la nueva temperatura será de $+7^{\circ}$.
- Si el termómetro marca -6° y la temperatura baja 2° , el termómetro marcará -8° .
- Si el termómetro ayer marcaba -3° y hoy marca $+7^{\circ}$, la temperatura ha subido de ayer a hoy 10° .
- Si a las ocho de la tarde el termómetro marca $+12^{\circ}$ y a las nueve marca $+8^{\circ}$, la temperatura habrá bajado en una hora 4° .

Ejemplo.



El siguiente dibujo presenta el panel de mando del ascensor de un edificio que tiene, además de la planta baja, cinco plantas y dos sótanos. El 0 se utiliza para llamar a la planta baja, la principal. Los números negativos se utilizan para designar a las plantas que están bajo tierra, por debajo de la planta principal, es decir, los sótanos. Y los números positivos para las plantas que están por encima de la principal.

- Una persona que vive en el tercer piso (+3) y deja el coche en el primer sótano (-1) tiene que subir 4 plantas para ir del parking a su casa, o bajar 4 plantas si quiere ir del piso al parking.
- Una persona que deja el coche en el segundo sótano (-2) y quiere ir a la calle (0) tiene que subir dos plantas.

2. REPRESENTACIÓN Y ORDENACIÓN DE NÚMEROS ENTEROS

Los números enteros se representan, de forma ordenada, sobre una recta llamada la recta numérica:



Como vemos en el dibujo, se sitúa el cero en la mitad de la recta. Los positivos se representan a la derecha del cero y los negativos a su izquierda.

Esta representación en la recta numérica nos sirve para poder comparar números enteros:

- Un número entero es mayor que otro si está situado más a la derecha en la recta numérica.
- De igual forma, un número entero es menor que otro si está situado más a la izquierda en la recta numérica.

Ejemplo. Ordena de menor a mayor los siguientes números enteros:

-3 , +1 , -5 , +7 , +2 , -1

Para ordenar estos números, los representamos en la recta numérica:



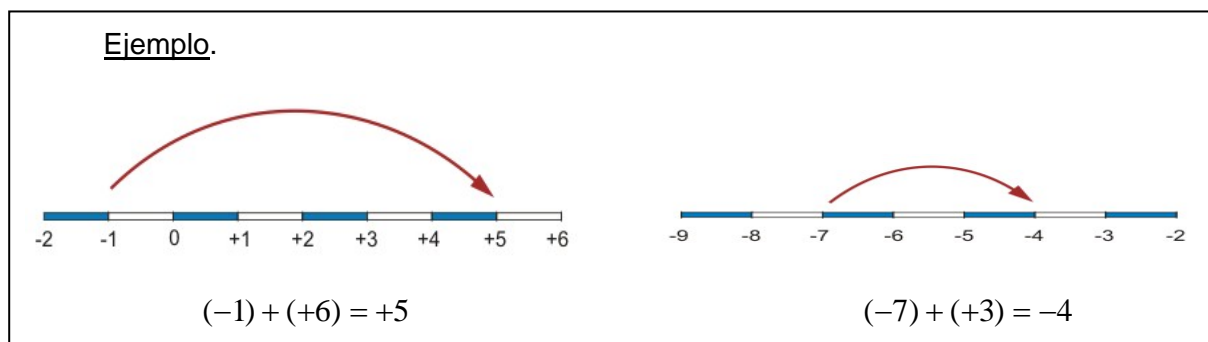
La ordenación de menor a mayor es: $-5 < -3 < -1 < +1 < +2 < +7$

3. OPERACIONES CON NÚMEROS ENTEROS

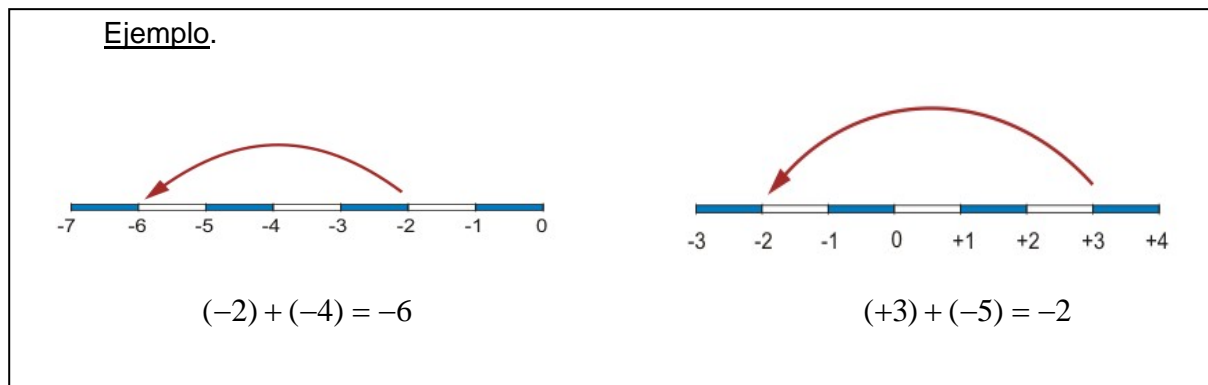
La suma y la resta de números enteros la vamos a realizar de forma gráfica, es decir, utilizando la recta numérica.

SUMA

Para sumar un número positivo nos desplazamos en la recta numérica, partiendo desde el primer sumando, hacia la derecha tantas unidades como nos indique el segundo sumando.



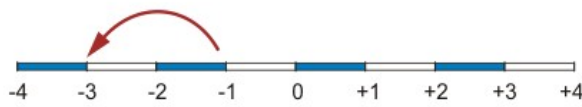
Para sumar un número negativo nos desplazamos en la recta numérica, partiendo desde el primer sumando, hacia la izquierda tantas unidades como nos indique el segundo sumando.



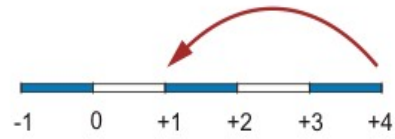
RESTA

Para restar un número positivo nos desplazamos en la recta numérica, partiendo desde el minuendo, hacia la izquierda tantas unidades como nos indique el sustraendo.

Ejemplo.



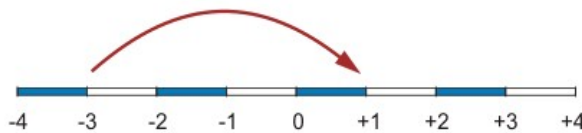
$$(-1) - (+2) = -3$$



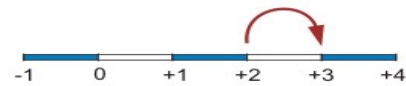
$$(+4) - (+3) = +1$$

Para restar un número negativo nos desplazamos en la recta numérica, partiendo desde el minuendo, hacia la derecha tantas unidades como nos indique el sustraendo.

Ejemplo.



$$(-3) - (-4) = +1$$



$$(+2) - (-1) = +3$$

Nota: observa que restar un entero negativo es como sumar un entero positivo, y que restar un entero positivo es como sumar un entero negativo.

MULTIPLICACIÓN

La multiplicación de números enteros se realiza igual que la de números naturales, pero añadiendo el signo al resultado, que puede ser positivo o negativo.

Si multiplicamos dos números enteros que tienen el mismo signo, es decir, que los dos son positivos o los dos son negativos, el resultado es positivo.

Y si multiplicamos dos números enteros que tienen distinto signo, es decir, uno es positivo y el otro negativo, el resultado es negativo.

Resumiendo:

$$(+)\times(+)=+$$

$$(-)\times(-)=+$$

$$(+)\times(-)=-$$

$$(-)\times(+)= -$$

Ejemplo. Multiplicaciones de números enteros.

$$(-2)\times(+3) = -6$$

$$(+4)\times(+7) = +28$$

$$(-6)\times(-8) = +48$$

$$(+5)\times(-9) = -45$$

DIVISIÓN

La división de números enteros se realiza igual que la de números naturales, pero añadiendo el signo al resultado, que puede ser positivo o negativo.

Si dividimos dos números enteros que tienen el mismo signo, es decir, que los dos son positivos o los dos son negativos, el resultado es positivo.

Y si dividimos dos números enteros que tienen distinto signo, es decir, uno es positivo y el otro negativo, el resultado es negativo.

Resumiendo:

$$(+):(+)=+$$

$$(-):(-)=+$$

$$(+):(-)=-$$

$$(-):(+)= -$$

Ejemplo. Divisiones de números enteros.

$$(+8):(-4)=-2$$

$$(-9):(-3)=+3$$

$$(-10):(+5)=-2$$

$$(+12):(+3)=+4$$

UNIDAD 8. SISTEMA MÉTRICO DECIMAL

1. MAGNITUDES
2. LONGITUD
3. MASA (PESO)
4. CAPACIDAD
5. SUPERFICIE

1. MAGNITUDES

El Sistema Métrico Decimal es un sistema de medida que se utiliza en la mayoría de los países del mundo, entre ellos el nuestro, España. Se llama “Decimal” porque las unidades de medida se relacionan entre ellas mediante potencias de base 10.

Una magnitud es cualquier característica que puede ser medida y expresada de forma numérica, es decir, mediante un número.

Para medir cualquier magnitud tomamos una referencia, que es la unidad de medida. Cada magnitud tiene sus unidades de medida: una que es la principal y las demás que son múltiplos y submúltiplos de ella.

Ejemplo. En la siguiente tabla se muestran algunas magnitudes y la unidad de medida más adecuada en cada caso:

| <i>Magnitud</i> | <i>Unidad de medida</i> |
|----------------------------|-------------------------|
| Temperatura de una caldera | Grados centígrados |
| Peso de un tonel | Kilogramos |
| Capacidad de una botella | Litros |
| Longitud de un cable | Metros |
| Superficie de una parcela | Metros cuadrados |

Las magnitudes que vamos a ver en esta unidad son la longitud, la masa (peso), la capacidad y la superficie.

2. LONGITUD

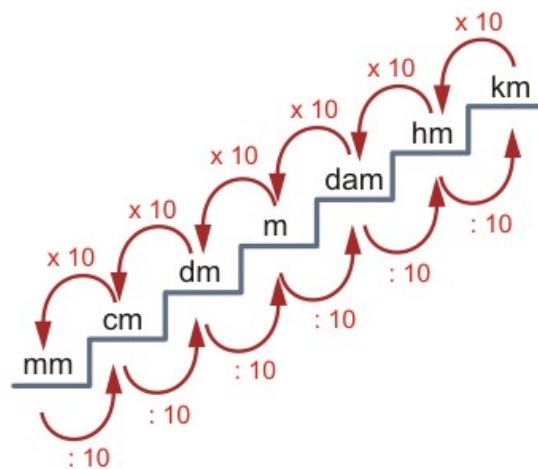
La longitud se define como la magnitud que expresa la distancia entre dos puntos. La principal unidad de medida de longitud es el metro (*m*).

Otras unidades de medida de longitud son:

Múltiplos del metro → $\left\{ \begin{array}{l} \text{Kilómetro}(km) \\ \text{Hectómetro}(hm) \\ \text{Decámetro}(dam) \end{array} \right.$

Submúltiplos del metro → $\left\{ \begin{array}{l} \text{Decímetro}(dm) \\ \text{Centímetro}(cm) \\ \text{Milímetro}(mm) \end{array} \right.$

El siguiente gráfico nos indica cómo pasar de unas unidades a otras, además de mostrarnos cómo están relacionadas entre sí:



Ejemplo. Pasar de unas unidades a otras:

| | | |
|---|---|--|
| $350 \text{ dm} = 35 \text{ m}$ | ; | $18'34 \text{ hm} = 183'4 \text{ dam}$ |
| $1 \text{ km} = 10.000 \text{ dm}$ | ; | $56.000 \text{ mm} = 5'6 \text{ dam}$ |
| $78.913 \text{ dam} = 7.891'3 \text{ hm}$ | ; | $1.000.000 \text{ cm} = 10 \text{ km}$ |

3. MASA (PESO)

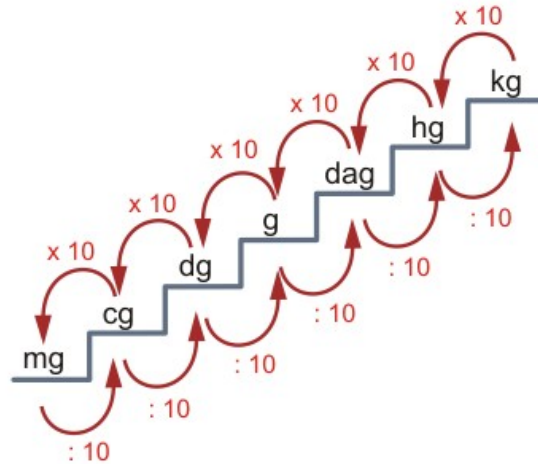
La masa se define como la magnitud que expresa la cantidad de materia que contiene un cuerpo. La principal unidad de medida de masa es el gramo (g). También se considera igual de importante el kilogramo (kg).

Otras unidades de medida de masa son:

Múltiplos del gramo → $\left\{ \begin{array}{l} \text{Kilogramo}(kg) \\ \text{Hectogramo}(hg) \\ \text{Decagramo}(dag) \end{array} \right.$

Submúltiplos del gramo \rightarrow $\left\{ \begin{array}{l} \text{Decigramo}(dg) \\ \text{Centigramo}(cg) \\ \text{Miligramo}(mg) \end{array} \right.$

Con el siguiente gráfico vemos cómo pasar de unas unidades a otras y también cómo se relacionan entre sí:



Otra unidad de masa muy conocida y utilizada es la *tonelada* (t). Una tonelada equivale a 1000 kilogramos.

$$1 \text{ t} = 1.000 \text{ kg}$$

Ejemplo. Pasar de unas unidades a otras:

| | | |
|---|---|---------------------------------------|
| $1'5 \text{ hg} = 150 \text{ g}$ | ; | $55.000 \text{ cg} = 5'5 \text{ hg}$ |
| $3'6914 \text{ dag} = 3.691'4 \text{ cg}$ | ; | $1.000.000 \text{ mg} = 1 \text{ kg}$ |
| $12 \text{ t} = 12.000 \text{ kg}$ | ; | $5'7 \text{ dg} = 0'057 \text{ dag}$ |

4. CAPACIDAD

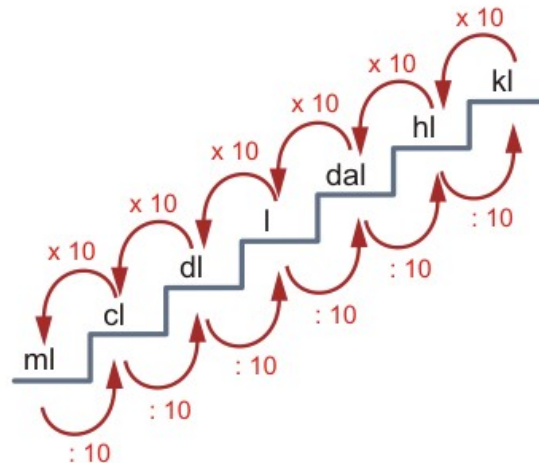
La capacidad se define como la magnitud que expresa el espacio contenido en un cuerpo. La principal unidad de medida de capacidad es el litro (l).

Otras unidades de medida de capacidad son:

Múltiplos del litro \rightarrow $\left\{ \begin{array}{l} \text{Kilolitro}(kl) \\ \text{Hectolitro}(hl) \\ \text{Decalitro}(dal) \end{array} \right.$

Submúltiplos del litro → $\begin{cases} \text{Decilitro}(dl) \\ \text{Centilitro}(cl) \\ \text{Mililitro}(ml) \end{cases}$

Para pasar de unas unidades a otras utilizamos el siguiente gráfico, con el que vemos cómo están relacionadas las unidades entre sí:



Ejemplo. Pasar de unas unidades a otras:

| | | |
|---------------------|---|------------------------|
| 13 l = 0'13 hl | ; | 45.000 cl = 450.000 ml |
| 7.985 ml = 7'985 l | ; | 0'08 kl = 80 l |
| 100 dal = 10.000 dl | ; | 0'2 hl = 0'02 kl |

5. SUPERFICIE

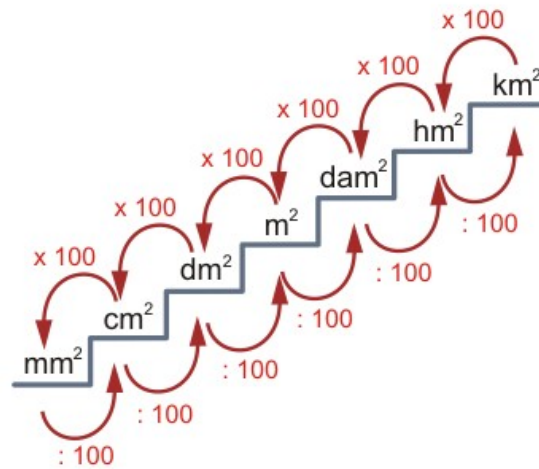
La superficie se define como la magnitud que expresa la extensión de un cuerpo en dos dimensiones. La principal unidad de medida de superficie es el metro cuadrado (m^2).

Otras unidades de medida de superficie son:

Múltiplos del metro cuadrado → $\begin{cases} \text{Kilómetro}_\text{cuadrado}(km^2) \\ \text{Hectómetro}_\text{cuadrado}(hm^2) \\ \text{Decámetro}_\text{cuadrado}(dam^2) \end{cases}$

Submúltiplos de metro cuadrado → $\begin{cases} \text{Decímetro}_\text{cuadrado}(dm^2) \\ \text{Centímetro}_\text{cuadrado}(cm^2) \\ \text{Milímetro}_\text{cuadrado}(mm^2) \end{cases}$

A diferencia de la longitud, la masa y la capacidad, las unidades de superficie se relacionan entre ellas mediante potencias de 10^2 , es decir, potencias de 100. Por lo tanto, para pasar de unas unidades de superficie a otras se hace según el gráfico siguiente:



Ejemplo. Pasar de unas unidades de superficie a otras:

$$13.000 \text{ dm}^2 = 130 \text{ m}^2 \quad ; \quad 0'09 \text{ km}^2 = 9 \text{ hm}^2$$

$$1 \text{ m}^2 = 1.000.000 \text{ mm}^2 \quad ; \quad 0'05 \text{ hm}^2 = 50.000 \text{ dm}^2$$

$$10.000 \text{ cm}^2 = 1 \text{ m}^2 \quad ; \quad 5.000.000 \text{ dm}^2 = 0'05 \text{ km}^2$$

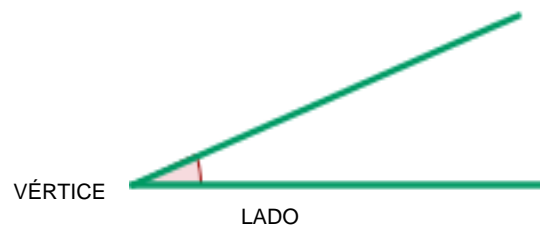
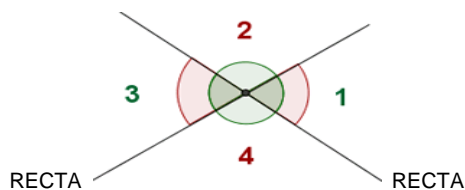
UNIDAD 9. LOS ÁNGULOS

1. LOS ÁNGULOS: ELEMENTOS Y TIPOS.
2. SISTEMA SEXAGESIMAL Y MEDIDA DE ÁNGULOS.
3. SUMA Y RESTA DE ÁNGULOS.
4. MEDIDAS ANGULARES COMPLEJAS E INCOMPLEJAS.
5. PASO DE MEDIDAS COMPLEJAS A INCOMPLEJAS Y VICEVERSA.

1. LOS ÁNGULOS: DEFINICIÓN Y ALIMENTOS.

Cada una de las cuatro regiones que se forman cuando se cortan dos rectas se llama ángulo. Un ángulo tiene dos **lados** y un **vértice**.

Quando se cortan dos rectas perpendiculares se forman 4 ángulos rectos.



Quando trazamos dos rectas que se cortan se forman 4 ángulos, tal como puede apreciarse en la figurada de la izquierda. Los ángulos **1 y 3 son opuestos por el vértice**, al igual que los ángulos 2 y 4. Los ángulos **1 y 2 son consecutivos**, al igual que los ángulos 3 y 4.

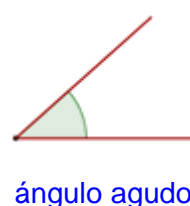
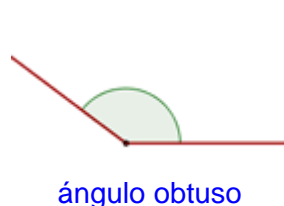
2. TIPOS DE ÁNGULOS

Ángulo recto: cada uno de los cuatro ángulos que se forman al cortarse dos rectas perpendiculares. Un ángulo recto mide 90° .

Ángulo agudo: es menor que un ángulo recto y mide menos de 90° .

Ángulo obtuso: es mayor que un ángulo recto y mide más de 90° .

Ángulo llano: es igual a dos ángulos rectos y mide 180° .



Ángulo nulo es el de 0° y ángulo completo el de 360° .

3. ÁNGULOS: SISTEMA SEXASEGIMAL Y UNIDADES DE MEDIDA

El sistema sexagesimal es un sistema de numeración en el que **cada unidad se divide en 60 unidades de orden inferior**. Se aplica en la actualidad a la medida del tiempo y a la **medida de ángulos**.

Los ángulos se miden en grados, minutos y segundos. **Un grado es igual a 60 minutos y 1 minuto es igual a 60 segundos.**

| | |
|--------------------------------------|----------------------------|
| 1 grado = 60 minutos $1^\circ = 60'$ | 1 minuto = 60" $1' = 60''$ |
|--------------------------------------|----------------------------|

4. TRANSPORTADOR Y MEDIDA DE ÁNGULOS

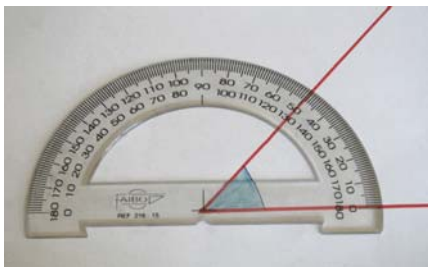
El transportador es el instrumento que sirve para medir los ángulos. Está dividido en *180 partes iguales*, cada una de las cuales es un grado. Los ángulos se miden en **grados sexagesimales**.

Para medir un ángulo:

1º Hacemos coincidir el vértice del ángulo con la marca que hay en el centro de la parte recta del transportador.

2º Hacemos coincidir un lado del ángulo con el 0 de la escala del transportador.

3º Miramos que número señala el otro lado en la escala del transportador y ésta es la medida del ángulo.



Ángulo agudo de 50°

5. SUMA DE ÁNGULOS

Para sumar medidas angulares:

1º Se colocan los grados debajo de los grados, los minutos debajo de los minutos y los segundos debajo de los segundos, y se suman.

2º Si el número de segundos pasa de 60, se divide dicha cantidad entre 60. El resto serán los segundos resultantes ($12''$) y el cociente se suma a los minutos. Quedan $96'$ y $12''$.

| | | | | | | | | | |
|---|---|-----|----|-----|---|-----|----|--|--|
| | | | | | | | | | |
| + | 2 | 5° | 3 | 6' | 2 | 4'' | | | |
| | 3 | 4° | 5 | 9' | 4 | 8'' | | | |
| | 5 | 9° | 9 | 5' | 7 | 2'' | | | |
| | | | | | | | | | |
| | 7 | 2'' | 6 | 0'' | | | | | |
| | 1 | 2'' | 1' | | | | | | |
| | 9 | 5' | + | 1' | = | 9 | 6' | | |
| | | | | | | | | | |

3º Se hace lo mismo con los minutos (si el número de minutos pasa de 60, se divide entre 60; el resto serán los minutos resultantes y el cociente se suma a los grados). Quedan 36' y 60".
Resultado final de la suma: 60° 36' 12"

| | | | | | | | | | |
|--|---|----|----|----|---|---|----|--|--|
| | 9 | 6' | 6 | 0' | | | | | |
| | 3 | 6' | 1° | | | | | | |
| | 5 | 9° | + | 1° | = | 6 | 0° | | |

6. RESTA DE ÁNGULOS

Para restar medidas angulares:

1º Se colocan los grados debajo de los grados, los minutos debajo de los minutos y los segundos debajo de los segundos.

2º Luego se restan las cantidades como en una resta normal.

3º Puede suceder que el número de minutos (o de segundos) del minuendo sea menor que el del sustraendo y no podamos restar. Entonces necesitamos preparar la cuenta para que podamos realizarla. Quitamos un grado del número de grados

| | | | | | | | | | |
|---|---|----|-------|----|--------|----|--|--|--|
| | | | (-1°) | | (+60') | | | | |
| - | 8 | 4° | 8 | 5' | 3 | 2" | | | |
| | 3 | 3° | 5 | 4' | 4 | 5" | | | |

del minuendo, lo pasamos a minutos (60 minutos) y le sumamos los 60 minutos a los minutos del minuendo. Luego se restan los minutos.

| | | | | | | | | | |
|---|---|----|---|-------|---|--------|--|--|--|
| | | | | (-1') | | (+60") | | | |
| - | 8 | 4° | 8 | 4' | 9 | 2" | | | |
| | 3 | 3° | 5 | 4' | 4 | 5" | | | |
| | 5 | 1 | 3 | 0' | 4 | 7" | | | |

Para el caso de que el número de segundos del minuendo sea menor que el del sustraendo, quitamos un minuto del número de minutos del minuendo, lo pasamos a segundos (60 segundos) y le sumamos los 60 segundos a los segundos del minuendo. Finalmente se restan los segundos.

Resultado final de la resta: 51° 30' 47"

7. MEDIDAS ANGULARES COMPLEJAS E INCOMPLEJAS

Medidas angulares complejas son las que se expresan con distintas clases de unidades. Ejemplo: 25° 16' 39"

Medidas angulares incomplejas son las que se expresan con una sola clase de unidades. Ejemplo: 325°

| | |
|------------------------------|------------------------|
| Medida compleja: 12° 25' 45" | Medida incompleja: 46° |
|------------------------------|------------------------|

8. PASO DE MEDIDAS COMPLEJAS A INCOMPLEJAS

Para pasar de medidas complejas a incomplejas hay que transformar cada una de las unidades que tenemos a la que queremos obtener como resultado final y sumar los resultados.

En la práctica debemos **pasar todas las cantidades a grados, o todas a minutos o todas a segundos y sumar los resultados.**

Ejemplo: Pasa a segundos la siguiente medida compleja: 14° 23' 45"

$$14^\circ \times 60' = 840'$$

$$840' + 23' = 863'$$

$$863' \times 60'' = 51.780''$$

$$14^\circ 23' 45'' = 51.780''$$

9. PASO DE MEDIDAS INCOMPLEJAS A COMPLEJAS

Debemos proceder de la siguiente forma:

1º Pasamos los segundos a minutos **dividiendo por 60**. El resto son los segundos de la medida compleja.

2º Los minutos del cociente anterior los pasamos a grados dividiendo por 60. El cociente resultante son los grados y el resto los segundos de la medida compleja. Y está resuelto el problema.

Pasa a grados, minutos y segundos la siguiente cantidad compleja: $225.618''$

| Paso los segundos a minutos | | | | | | Paso los minutos a grados | | | | | | | | |
|-----------------------------|---|---|---|---|-----|---------------------------|-----|---|----|---|----|---------------------------------|----|-----|
| 2 | 2 | 5 | 6 | 1 | 8'' | 6 | 0'' | 3 | 7 | 6 | 0' | 6 | 0' | |
| | 4 | 5 | 6 | | | 3 | 7 | 6 | 0' | 1 | 6 | 0 | 6 | 2'' |
| | | 3 | 6 | 1 | | | | | | 4 | 0' | | | |
| | | | 0 | 1 | 8 | | | | | | | | | |
| | | | | 1 | 8'' | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | $225.618'' = 62^\circ 40' 18''$ | | |

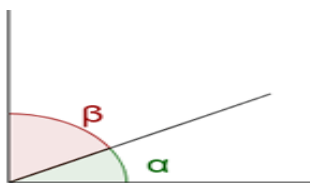
11. ÁNGULOS COMPLEMENTARIOS Y ÁNGULOS SUPLEMENTARIOS

Ángulos **complementarios** son los que **suman 90°** , o sea, un ángulo recto. Un ángulo de 30° y otro de 60° son complementarios porque suman 90° .

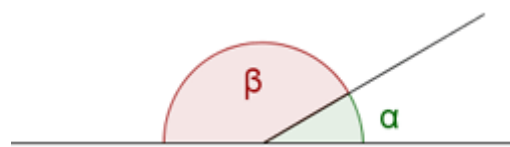
$$30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$$

Ángulos **suplementarios** son los que **suman 180°** , o sea, un ángulo llano. Un ángulo de 150° y otro de 30° son complementarios porque suman 180° .

$$150^\circ + 30^\circ = 180^\circ$$



ángulos complementarios: 90°

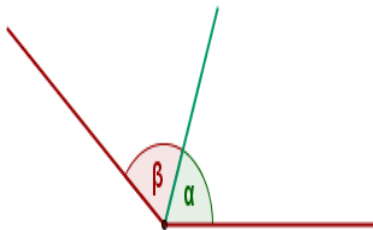


ángulos suplementarios: 180°

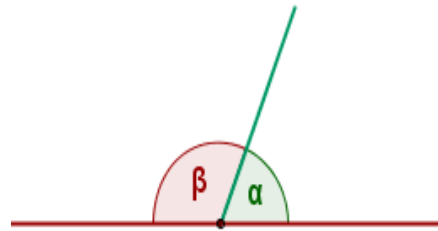
11. ÁNGULOS COMPLEMENTARIOS Y ÁNGULOS SUPLEMENTARIOS

Ángulos consecutivos son los que tienen el mismo vértice y un lado en común. Van seguidos, uno pegado al otro.

Ángulos adyacentes son dos ángulos consecutivos, que tienen los lados no comunes situados uno en prolongación del otro. Por tanto forman un ángulo llano y son suplementarios (suman 180°).



ángulos consecutivos



ángulos consecutivos adyacentes

Para sumar un número negativo nos desplazamos en la recta numérica, partiendo desde el primer sumando, hacia la izquierda tantas unidades como nos indique el segundo sumando.

11. BISECTRIZ DE UN ÁNGULO

La bisectriz de un ángulo es la semirrecta que pasa por el vértice y lo divide en dos partes iguales.

Si un ángulo mide 90° , su bisectriz lo divide en dos ángulos iguales de 45° cada uno.

